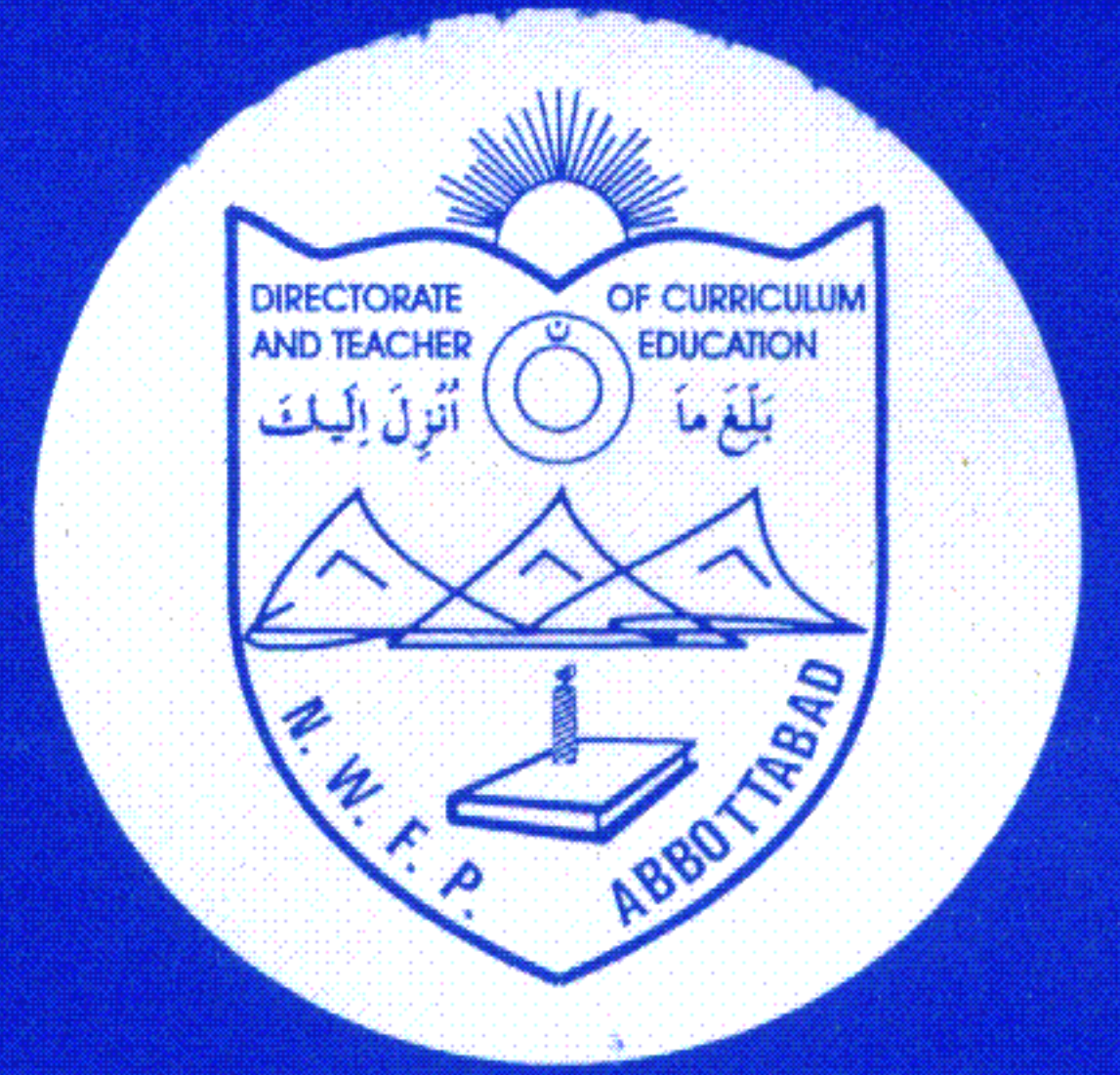
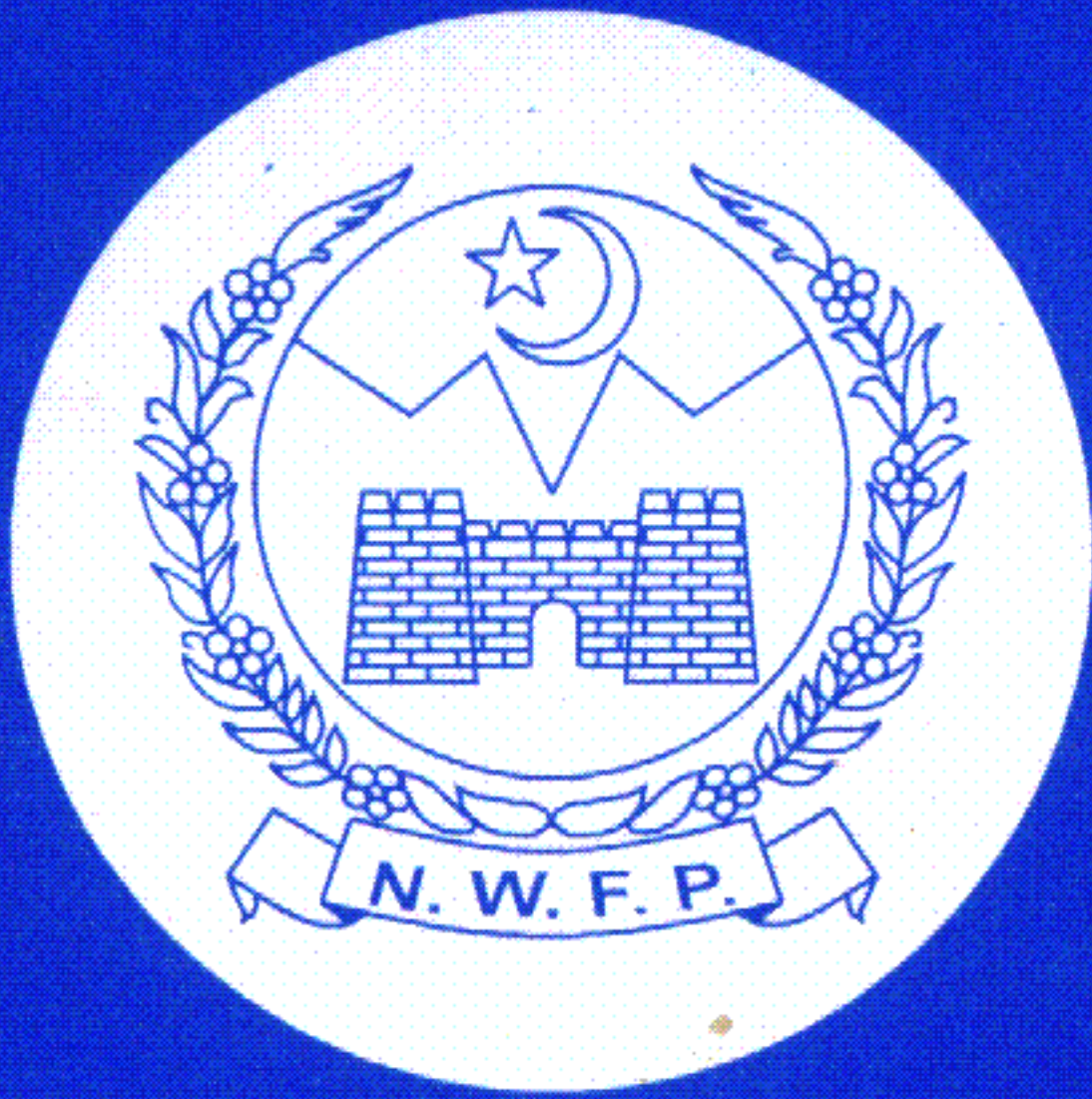
ماڈیول تدریس ریاضی

TEACHING OF MATHEMATICS

VII, VIII

برائے

ماسٹر ٹرینرز

(اِن سروس ٹریننگ پروگرام)

نظامت نصاب تعلیم اساتذہ صوبہ سرحد

ایبٹ آباد

مئی۔ جون 2002ء

ماڈیول تدریس ریاضی

TEACHING OF MATHEMATICS

IX, X

برائے

ماسٹر ٹرینرز

(اِن سروس ٹریننگ پروگرام)

سرپرست اعلیٰ
عمر فاروق
ڈائریکٹر

مصنّف اور نظر ثانی
محمد فرید
اسسٹنٹ ڈائریکٹر

مقام اشاعت ——— ایبٹ آباد

ناشر: نظامت نصاب تعلیم اساتذہ صوبہ سرحد

ایبٹ آباد

مئی۔ جون 2002ء

فہرست عنوانات

پیش لفظ:

دنیا کے ہر ملک میں نظامِ تعلیم کی حقیقی کامیابی کا دارومدار اساتذہ صاحبان پر ہوتا ہے۔ کیونکہ نصاب کتنا ہی جامع، جدت پذیر اور محرک تصوارت کا حامل کیوں نہ ہو وہ ایک بے جان جسم کی حیثیت رکھتا ہے۔ جب تک اساتذہ صاحبان اپنے تخلیقی عمل سے اس میں حرکت اور حرارت پیدا نہیں کرتے۔ لہذا تعلیمی نظام کی اصلاح، اور اس کی ترقی کا پہلا قدم اساتذہ صاحبان کی تربیت اور رہنمائی کا اہتمام کرنا ہے۔

ہمارے اساتذہ میں ذہانت اور فطانت کی کمی نہیں۔ البتہ ان کی کثیر تعداد جدید رجحانات سے لاعلمی کے باعث روایتی طریقہء تدریس کی پابند ہے۔ اساتذہ صاحبان کو عصری تقاضوں اور نئے طریقوں سے آشنا کرنے کے لئے سابقہ دور میں وقتاً فوقتاً تعلیمی کورسوں کا اہتمام کیا جاتا رہا۔ لیکن ان سے بیک وقت ایک محدود تعداد ہی مستفید ہوتی رہی۔ لہذا ان حالات میں حکومت صوبہ سرحد اور محکمہ تعلیم نے Pre-Service میں تربیت اساتذہ کے پروگرام کو تین سالوں کے لئے معطل کر کے In-Service اساتذہ کی تربیت کے پروگرام کا انعقاد کیا ہے۔ اس عرصہ میں ایسی منصوبہ بندی کی گئی ہے کہ اساتذہ کے تمام Cadres یعنی PTC سے لے کر S.S تک اس پروگرام سے مستفید ہو سکیں گے۔ چنانچہ سابقہ طریقہ کار میں زیر بحث آنے والے مسائل جو صرف رپورٹوں کی زینت بن جایا کرتے تھے، ضروری سمجھا گیا کہ ماہرین تعلیم کے خیالات اور تجربات کو عملی شکل میں تمام اساتذہ کے سامنے پیش کیا جائے تا کہ وہ عصری تقاضوں اور جدید طریقوں سے واقفیت حاصل کر کے اپنی تدریس کو زیادہ موثر اور نتیجہ خیز بنا سکیں۔

زیر نظر ماڈیول میں اپنے علم اور تجربہ کی روشنی میں ریاضی کے مختلف موضوعات کے متعلق مواد ایک کوشش ہے اور کوشش بھی معمولی۔ البتہ جب اساتذہ اس کا مطالعہ کریں گے اور استعمال میں لانے کے بعد ہمیں بتائیں گے کہ اس مواد کو کس حد تک اور کس طرح مزید بہتر بنایا جا سکتا ہے۔ امید ہے کہ اس مواد کی اشاعت سے جماعتی تدریس کا معیار بہتر صورت میں بن جائے گا۔

ریاضی کی اہمیت اور مقاصد

کسی بھی نظام تعلیم میں ریاضی کو بنیادی حیثیت حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کا مضمون سکولوں کے نظام میں ایک اہم جذو سمجھا جاتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ریاضی کا مضمون نرسری سے لیکر اعلیٰ تعلیم تک ہر سطح پر پڑھایا جاتا ہے۔ جدید دور میں ریاضی نہ صرف سائنس اور ٹیکنالوجی کی ترویج وترقی کیلئے ضروری ہے بلکہ زندگی کے ہر شعبے میں اس مضمون کا عمل دخل اور اطلاق نمایاں نظر آتا ہے۔ ماہرین نفسیات کی رائے ہے کہ یہ مضمون طلباء کی ذہنی قوت کی نشو ونما اور سوچ بچار پر گہرا اثر ڈالتا ہے۔ اس مضمون کو پڑھنے سے حقائق کو سمجھنے اور پرکھنے میں بڑی مدد ملتی ہے۔ ریاضی کے سوالات اور مسائل کو حل کرنے کیلئے جدوجہد اور کوشش انسان کو دوسرے شعبہ جات میں Challenge قبول کرنے اور اس کا سامنا کرنے کے قابل بناتی ہے۔

ریاضی جس قدر اہم ہے اسی مناسبت سے اس مضمون سے متعلق غلط فہمیاں بھی کچھ زیادہ ہی ہیں۔ عام لوگوں کا خیال ہے کہ ریاضی ایک بور اور خشک مضمون ہے، یا زیادہ وقت طلب اور محنت طلب مضمون ہے۔ جبکہ حقیقت اس کے برعکس ہے۔ ریاضی میں مختلف تحقیقات سے یہ بات سامنے آئی ہے کہ ریاضی ایک نہایت دلچسپ، خوبصورت اور حقائق سے قریب مضمون ہے۔ اور جو لوگ اس کو مشکل تصور کرتے ہیں حقیقت میں وہ اس مضمون کے چند بنیادی اصولوں اور قواعد سے ناواقف ہوتے ہیں۔ ریاضی وہ واحد مضمون ہے جس میں طلباء اگر دلچسپی لیں تو وہ سو فیصد نمبر لے سکتے ہیں۔

ریاضی کو سائنسی علوم کی چابی Key of Science بلکہ سائنسی علوم کی ماں Mother of Science بھی کہتے ہیں۔

تمام سائنسی مضامین مثلاً انجنیئرنگ، میڈیکل اور تکنیکی علوم میں ریاضی کا بے پناہ کردار ہے۔ اور مختلف پیشوں میں ریاضی کا استعمال اظہر من الشمس ہے۔ درزی ہو یا موچی، لوہار ہو یا ترکھان، معمار ہو یا مزدور، کسان ہو یا زمیندار، پٹواری ہو یا انجنیئر، ڈاکٹر ہو یا کیمسٹ، تاجر ہو یا آجر ریاضی کے بنیادی قاعدوں اور کلیوں کی ضرورت ہر لمحہ محسوس کرتا ہے۔ اس کے علاوہ دوسرے مضامین میں بالعموم اور سائنس میں بالخصوص، ریاضی کا استعمال کلیدی حیثیت کا حامل ہے۔ طبعیات،

کیمیا،جغرافیہ،اقتصادیات،نفسیات،شماریات،فلکیات،حیاتیات اورنباتات وغیرہ میں ریاضی کے بغیر ایک قدم بھی آگے بڑھنا ناممکن ہے۔

ریاضی کی تدریس سے مندرجہ ذیل عادات راسخ کی جاسکتی ہیں۔

(1) کسی مسلے کوحل کرنے کیلئے ضروری ہے کہ اس کا تجزیہ کر کے حل کی ممکن صورتوں میں سے صحیح راستہ تلاش کیا جاسکے۔ چنانچہ ریاضی کے مطالعے میں تحلیلی حل سوچے جاتے ہیں جو مسائل کے صحیح تجزئے اور اقدامات عمل کی نشاندہی کرتے ہیں۔ اور یہ عادت زندگی بھر بچے کیلئے ایک بیش قیمت سرمایہ سمجھی جاتی ہے۔

(2) منطقی غور وفکر اور بات چیت انسان کے اوصاف حمیدہ میں سے ہیں۔ علم ریاضی کی بنیاد منطق پر ہے۔ اور اس میں مستند دلیل کے بغیر کسی چیز کو درست نہیں مانا جاتا۔ چنانچہ ریاضی کے مطالعے سے بچہ صحیح استدلال کا عادی بن جاتا ہے۔

(3) ریاضی کے سائل کرنے سے جدوجہد کرنے اور منزل پر پہنچنے کے بعد دم لینے کی تربیت ملتی ہے۔ چنانچہ بچہ سوالات کے حل کرنے میں اپنی دماغی کاوشوں کو کام میں لاتے ہوئے اس وقت تک کوشش جاری رکھتا ہے جب تک کہ سوال کا صحیح جواب نہ دریافت کرلے۔ اور جواب کی صحت کے متعلق یقین کئے بغیر اس کی تسکین نہیں ہوتی۔ یہی وجہ ہے کہ صداقت کو پالینے تک جستجو جاری رکھنے کی عادت پختہ کرنے کے لئے ریاضی سے بہتر کوئی مضمون نہیں ہے۔

(4) موجودہ دور میں کاروبار اور کمرشل سسٹم کو بہت اہمیت حاصل ہے۔ اور ریاضی کا اطلاق ان شعبہ جات میں بہت زیادہ ہے۔ مختلف اداروں کو اپنے بجٹ کی تیاری کے لئے بھی ریاضی کی ضرورت پڑتی ہے۔ قدرتی شاہکار بھی ریاضیاتی اصولوں کی پیروی کرتے دکھائی دیتے ہیں۔ جیسے سورج کا اتار چڑھاؤ۔ چاند کا نکلنا۔ موسموں کا تغیّر اور ستاروں کی گردش وغیرہ میں وقت اور ریاضیاتی اصول کارفرما ہیں۔ نیولین نے کیا خوب کہا تھا کہ ''ریاضی کی ترقی اور ترویج کا تعلق ریاست کی سالمیت سے وابستہ ہے'' اس بات میں کوئی شک نہیں کیونکہ ریاضی کے طریقے انسانیت کی ضرورت سے ہم آہنگ ہیں۔ ہر چھوٹی بڑی سرگرمی جیسے بازار سے خریداری، دعوت کی تیاری، بچوں کو سکول میں

داخل کرانا۔ کسی پیشے کو اپنانا۔ شادی کے انتظام اور جشن۔ ان تمام امور میں ریاضی کا عمل دخل نمایاں نظر آتا ہے۔ بظاہر اس میں ریاضی کا کوئی فارمولا یا سوال تو نظر نہیں آتا لیکن ان سرگرمیوں پر غور و خوض' اچھے برے کی پہچان 'نفع ونقصان کا احساس اور تربیت اور تنظیم کا خیال دراصل ریاضی ہی کے تہ وصف ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر کوئی ان پڑھ دیہاتی بازار جا کر ریڈیو خریدنا چاہتا ہے تو وہ کئی دکانوں سے ریڈیو کے نرخ اور کوالٹی دیکھے گا اور پھر کسی مناسب دکان سے ریڈیو خریدے گا۔ اب کہنے کو تو شاید وہ ریاضی نہیں جانتا مگر دراصل بالواسطہ طور پر ریاضی ہی کا استعمال کر رہا ہوتا ہے۔

الغرض ریاضی کی عملی اقدار بے پناہ ہیں۔ یہی وجہ ہے کہ ریاضی کو عام زندگی اور سکول کے نصاب میں اہم مقام حاصل ہے۔ موجودہ دور کی تیز رفتاری اور سائنسی حیثیت کو تسلیم کرنے کے بعد ریاضی کا استعمال اور کردار اور زیادہ اہم ہو گیا ہے۔

ریاضی میں مسلمانوں کا کردار

ریاضی اور اسکی تدریس میں مسلمانوں کا کردار ازل سے نمایاں اور اہم رہا ہے۔ شاید ہی ریاضی کی کوئی ایسی شاخ ہو جس میں مسلمانوں نے طبع آزمائی نہ کی ہو۔ مغربی مصنفین کی کتابوں سے مسلمانوں کی حساب، ابتدائی الجبرے اور جیومیٹری کے ارتقاء میں معلومات ملتی ہیں۔

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ حساب کی ابتداء گنتی سے ہوئی۔ گنتی کی کتابت کا بہترین طریقہ ہندوستانیوں کی ایجاد ہے۔ اسلام سے پہلے عرب ہندسوں کا استعمال نہیں جانتے تھے اور عددوں کو لفظوں میں لکھتے تھے۔ پہلی صدی ہجری کے آخری حصہ میں عربوں نے یونانیوں کی تقلید میں ہندسوں کو حروفِ تہجی سے ظاہر کرنا شروع کیا۔ ہندسوں کے استعمال میں عرب دو حصوں میں بٹ گئے۔ ایک نے وہ ہندسے اختیار کیے جنہیں آج کل انگریزی ہندسے کہا جاتا ہے جبکہ دوسروں نے وہ ہندسے رواج دیئے جنہیں آج کل اردو ہندسے کے نام سے یاد کیا جاتا ہے۔

محمد بن موسیٰ الخوازمی نے یورپ میں نظامِ عشری کو رواج دیا۔ الخوارزمی خلیفہ مامون الرشید کے عہد میں ایک لائبریرین تھا۔ اس نے حساب کی ایک کتاب لکھی جس میں اعداد کی قرآت اور کتابت، ہندسوں کی مقامی قیمت، صحیح اعداد اور کسروں کے بنیادی اصول اور اعداد کے جذر اور طاقت کو اسطرح پیش کیا کہ اس زمانے کی کوئی کتاب اس کا مقابلہ نہیں کر سکتی۔ یہی وجہ ہے کہ حساب کے بنیادی عوامل کو اطالوی زبان میں Algnim کہا گیا۔ اور بعد میں قوت نما کو لکھنے کا طریقہ Logrith کے نام سے یاد کیا جانے لگا۔ بہت عرصہ تک یورپ والے یہ سمجھتے رہے کہ Logrith کا لفظ اطالوی دو لفظوں Logo اور *Akith* سے مرکب ہے۔ لیکن 1857ء میں جب کیمبرج یونیورسٹی سے الخوازمی کے حساب کا اطالوی ترجمہ سامنے آیا تو غلط فہمی دور ہوگئی۔ فارسی کے مشہور شاعر عمر خیام نے ایران کے ملک شاہ سلجوقی کے حکم سے ایرانی کلینڈر میں ترمیم کر کے شمسی کیلنڈر بنا دیا۔ اس کیلنڈر کے مطابق پانچ ہزار سال کے بعد ایک دن کا فرق پڑتا تھا جبکہ عیسوی کیلنڈر میں 3398 سال بعد ایک دن کا فرق پڑتا تھا۔ گویا عمر خیام کا یہ کیلنڈر عیسوی کیلنڈر سے بہتر تھا۔ تیرھویں صدی میں فارسی

کے مشہور شاعر نصیر الدّین طوسی نے حساب کی ایک مستند کتاب لکھی۔ اور سولھویں صدی میں مصر کے مشہور ریاضی دان بہاؤ الدّین نے حساب کی ایک جامع کتاب لکھ کر ریاضی کے میدان میں ایک قابل قدر اضافہ کیا۔ ان دونوں کتابوں میں حساب کے بنیادی عوامل کے علاوہ تقسیم بہ اجزائے تناسب، شراکت اور اربعہ متناسبہ پر سیر حاصل بحث کی گئی۔ محمد بن موسٰی الخوارزمی نے ریاضی کی ایک اور کتاب الجبر و المقابلہ کے نام سے لکھی۔ نفس مضمون کے لحاظ سے مساوات Equation کے بارے میں یہ پہلی کتاب تھی۔ اور جب اس کتاب کا ترجمہ یورپی زبانوں میں ہوا تو اس کا نام Algebra رکھا گیا۔

عربوں کو مستطیل، مربع، متوازالاضلاع، ذوزنقہ، مثلث اور دائرے کے رقبے نکالنے کی کلیات معلوم تھے اور وہ پائی کو 22/7 مانتے تھے۔ اور Hero Formula کے ذریعے مثلث کا رقبہ معلوم کر لیتے تھے۔ ہندوؤں کے زمانے میں راجہ تو ڈرمل کے بندوبست اراضی کی بڑی تعریف کی جاتی ہے حالانکہ راجہ تو ڈرمل سے سینکڑوں سال پہلے یہی کام حضرت عثمان بن حنیفؓ سرانجام دے چکے تھے۔ جب آپ کو خلیفہ وقت حضرت عمرؓ نے زمین کی پیمائش کے بعد مالیہ وصول کرنے کا حکم دیا تو کثیر رقم دیکھ کر خلیفہ وقت کو شک گزرا کہ مالیہ کی وصولی میں جبر و تشدد سے کام لیا گیا ہے، مگر بعد میں پتہ چلا کہ حضرت عثمان بن حنیف نے محض نصف مالگزاری وصول کی تھی۔

جیومیٹری کے موجد بھی عرب بتائے جاتے ہیں۔ مصریوں نے اہرام مصر کی تعمیر اور دریائے نیل کی طغیانی کے بعد زمین کو از سر نو تقسیم کرنے کے لئے چند تجرباتی اصول وضع کئے تھے۔ یونانیوں نے بھی علم ہندسہ یعنی جیومیٹری کے سادہ اصول مصریوں سے سیکھے۔ مسلمانوں نے یونانیوں کی ریاضی میں لکھی ہوئی کتابوں کا عربی اور فارسی میں ترجمہ کیا اور اسطرح یورپ کو علم ہندسہ سے روشناس کرایا۔ مثلاً طوسی نے متوازی خطوط کے متعلق اقلیدس کے اصول موضوعہ کا ثبوت دیا۔ الخوارزمی نے مسئلہ فیثا غورث کا بالکل اچھوتا ثبوت دیا۔ القرشی نے مثلث کو تین برابر حصوں میں تقسیم کرنے کا طریقہ دریافت کیا۔ ابوالھیثم نے طریقہ اسقاط پر بحث کی۔ ابوالوفا نے ایک ہی رداس کی قوسیں لگا کر ہندسی شکل بنانے کا طریق دریافت کیا۔

تدریس ریاضی کے فائدے

تعلیم کا ایک اہم مقصد متعلقہ علم کو استعمال کرنا ہوتا ہے۔ ریاضی کے مختلف اصولوں اور طریقوں کا استعمال عام زندگی میں بہت ہوتا ہے۔ گنتی، جمع، تفریق، ضرب، تقسیم اور وزن ایسے بنیادی عوامل ہیں کہ جن کا عملی زندگی میں بہت عمل دخل ہے۔ ان عوامل میں علم اور مہارت دراصل تعلیمی اداروں میں تدریسی ریاضی سے ہی مؤثر ہوسکتی ہے۔ کچھ مضامین میں غور وفکر کے بغیر بھی گزارہ ہوسکتا ہے لیکن ریاضی میں اس کے بغیر کوئی چارہ ہی نہیں۔ ضروری ہے کہ طلبہ بالکل صحیح سوچیں۔ اس میں کسی غلطی کی گنجائش نہیں ہوسکتی۔ ریاضی کا جواب یا تو صحیح ہوگا یا غلط۔ اور یہ معلوم کرنا بھی آسان ہے کہ جواب صحیح ہے یا غلط۔ گویا فوراً ہی طلبہ کے سوچ وبچار کا امتحان ہوجاتا ہے۔ اور یہ یقین کے ساتھ کہا جاسکتا ہے کہ طلبہ اور استاد میں کوئی اختلاف رائے نہیں۔ طلبہ جب کوئی سوال کرتے ہیں اور جب انہیں یقین ہو جاتا ہے کہ جواب صحیح ہے تو انہیں بہت خوشی حاصل ہوتی ہے۔ جبکہ دوسرے کئی مضامین میں کسی مسئلے کو صحیح یا غلط نہیں کہا جاسکتا۔ اس مسئلے پر بڑے بڑے ماہرین کا بھی اختلاف رائے ہوسکتا ہے۔

ریاضی میں طلبہ سوچ وبچار کرتے ہیں۔ اس میں ان کی ذاتی کاوش شامل ہوتی ہے اور اس کا تعلق اصلیت سے ہوتا ہے۔ طلبہ صرف سنی سنائی باتوں کو زبانی دہرا کر سوالات حل نہیں کرتا۔ اس کے برعکس دوسرے مضامین میں جو سوچ وبچار کیا جاتا ہے اس کا تعلق محض اصلیت سے نہیں ہوتا۔ زیادہ تر سیکھنے سے ہوتا ہے۔ چیزیں سیکھ لی جاتی ہیں اور محض زبانی یاد کر کے ان کو دہرادیا جاتا ہے۔ ایسے طلبہ جن کا حافظہ اچھا ہو، قابلیت حاصل کر لیتے ہیں لیکن ریاضی میں محض حافظے کے زور سے کام نہیں چل سکتا۔ اس میں اصل سوچ وبچار لازمی ہے۔ اور یہ بھی ضروری ہے کہ سوچ وبچار کی یہ اصلیت درست بھی ہو اور یقینی بھی۔

جس طرح شروع شروع میں شدید قسم کی جسمانی ورزش مضر ہوتی ہے اسی طرح یہ بھی ضروری ہے کہ شروع میں بچوں کی ذہنی ورزش بہت آسان اور سہل ہو، ورنہ فائدہ کی بجائے نقصان

ہوگا۔ شروع میں بہت آسان سوال لئے جاتے ہیں اور ان کو بتدریج مشکل کیا جا سکتا ہے۔ ریاضی کے ذریعے جو صحیح اور صاف سوچ کی طاقت حاصل ہوتی ہے وہ زندگی میں بہت کارآمد ثابت ہوتی ہے۔

ریاضی کے ہر سوال میں سوچنا پڑتا ہے، اس لئے خیالات کا اجتماع ضروری ہے۔ یہ خصوصیت ریاضی کے طلبہ میں خود بخود پیدا ہو جاتی ہے۔ ریاضی میں ہر نئے مسئلے کو حل کرنے میں حقیقی سوچ و بچار سے کام لینا پڑتا ہے۔ یہ ذاتی اور حقیقی سوچ و بچار سائنس کی ایک ایجاد کرنے کے مشابہ ہے۔ ریاضی کا ایک معمہ حل کرنا نئی ایجاد کی طرح ہے۔ گویا ریاضی کے مسائل حل کرتے ہوئے طلبہ کی قوت ایجاد میں اضافہ ہوتا ہے۔ وہ صرف دوسروں کی بتائی ہوئی چیزوں پر اکتفا نہیں کرتا، اسے اپنی کامیابی پر بھروسہ ہوتا ہے۔ وہ دوسروں کے فیصلہ کی پروا یا انتظار نہیں کرتا۔

ریاضی کی تعلیم سے طلبہ میں باقاعدگی اور دیگر اچھی عادات کی تربیت ہوتی ہے اور مشکل مسائل کو حل کرنے سے طلبہ کی سچائی اور دیانت میں اضافہ ہوتا ہے۔ موجودہ دور کی ثقافتی اور تہذیبی ترقی بھی ریاضی ہی کی مرہونِ منت ہے۔ انسان کی رہن سہن، بول چال، اور دیگر ضروریات زندگی میں ریاضی کی ترقی کے بعد نمایاں تبدیلی آئی ہے۔ ریاضی دراصل پرانے اور نئے تقاضوں کے ملانے کا ذریعہ بھی ہے۔ ریاضی دیگر ثقافتی شعبوں مثلاً آرٹ، موسیقی، شاعری اور مصوری کیلئے بنیادی اہمیت کی حامل ہے۔ تقریباً سبھی سائنسدان ریاضی کے بھی بہت ماہر ہوتے ہیں۔

تدریس ریاضی میں معاونات کا استعمال

پروفیسر جان ڈیوی کے مطابق ''نوے فیصد طلبہ جو ریاضی کو ناپسند کرتے ہیں، یا یہ خیال کرتے ہیں کہ ان میں ریاضی پڑھنے کی فطری صلاحیت موجود نہیں ہے، دراصل غلط طریقہ ہائے تدریس کا شکار ہیں''۔

طلبہ ریاضی کو بالعموم خشک مضمون تصور کرتے ہیں۔ بہت سے طلبہ اس مضمون سے گھبراتے ہیں۔ ایسے طلبہ ریاضی کے کلیے، قاعدوں اور اصولوں کو صحیح طور پر سمجھ نہیں پاتے۔ غلط طریقہ ہائے تدریس کی وجہ سے اکثر طلبہ یہ خیال کرتے ہیں کہ وہ ذہنی طور پر اس قابل نہیں ہیں کہ ریاضی کے اصولوں اور قاعدوں کو یاد رکھ سکیں۔ دراصل ہمارے طریقہ ہائے تدریس میں دلچسپی کا فقدان ہے۔ ریاضی کے کلیوں اور قاعدوں کو رٹوایا جاتا ہے۔ جس کا نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ اکثر طلبہ اس مضمون سے نفرت کرنے لگ جاتے ہیں۔ اگر اساتذہ اس مضمون کی افادیت کے پیش نظر اس کے تدریسی طریقوں میں سمعی، بصری اعانات کو اہمیت دیں اور ریاضی کے مضمون کو طلبہ کی روزمرہ زندگی سے مربوط کریں اور سمعی، بصری اعانات کی مدد سے اسباق میں دلچسپی پیدا کی جائے تو کوئی وجہ نہیں کہ طلبہ ریاضی میں دلچسپی نہ لیں۔

ہم جانتے ہیں کہ تدریس ریاضی میں مشکلات کا بڑا سبب مجرّد اصول ہیں، جن کو بچے آسانی سے سمجھ نہیں پاتے، اس مشکل کا حل یہی ہوتا ہے کہ طلبہ کی معلوم سے نامعلوم محسوس سے غیر محسوس اور سادہ سے پیچیدہ کی طرف رہنمائی کی جائے۔ ماہرین نفسیات نے یہ نتیجہ اخذ کیا ہے کہ انسانی علم کا 87 فیصد حصہ مشاہدات کی بدولت یعنی قوت بصارت سے کام لے کر حاصل ہوتا ہے۔ باقی 13% حصہ حواس کی بدولت حاصل ہوتا ہے۔ علم کے حصول میں حواس خمسہ اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ لہذا طلبہ کے تصورات اور خیالات کو پختہ بنانے کیلئے مختلف حواس سے کام لینا ضروری ہے۔ تدریسی معاونات کے ذریعے بڑے بڑے مجرّد تصورات اور خیالات بھی واضح تر ہو جاتے ہیں۔ اور طلبہ کے ذہنوں پر گہرا اثر ثبت ہوتا ہے۔ کلاس میں طالب علم ایک منفرد حیثیت کا حامل ہوتا ہے۔ سبھی طلبہ کے

نظریات، عقائد، جذبات، احساسات، ذہنی استعداد، تفہیم کی اہلیت، ذہانت اور فطانت میں فرق ہوتا ہے۔ بعض طلبہ الفاظ سن کر ہی ان کے معنی کی تہہ تک پہنچ جاتے ہیں لیکن بعض طلبہ ایسے بھی ہوتے ہیں جو ان الفاظ سے متعلقہ اشیاء کو دیکھے بغیر نہیں سمجھ پاتے۔ کچھ طلبہ لکھ لکھ کر یاد کرتے ہیں جبکہ کچھ طلبہ پڑھ کر یاد کرنے کے عادی ہوتے ہیں۔ یہ انفرادی اختلافات اس بات کا تقاضا کرتے ہیں کہ اساتذہ ان طلبہ کو مختلف طریقہ ہائے تدریس سے پڑھائیں اور دوران تدریس مختلف تدریسی اعانات استعمال کریں۔

جس دور میں ہم رہ رہے ہیں، اس میں سائنس نے بہت سی معلومات فراہم کردی ہیں۔ موجودہ نفسیات نے ہمارے طریق ہائے تدریس میں تنوع اور جدت پیدا کردی ہے۔ تدریس کے میدان میں کئی نئی اختراعات ہورہی ہیں جن کے ذریعے ہم مختصر مدت میں زیادہ سے زیادہ خیالات اور حقائق طلبہ کے ذہنوں تک منتقل کرسکتے ہیں۔ ان سے تدریس کا عمل کافی آسان ہوگیا ہے۔ جدید بے شمار ذرائع ابلاغ میں تدریسی مشین فلم، ٹی وی اور کمپیوٹر شامل ہیں۔ ان وسائل، معاونات کو سمعی اور بصری اعانات کہا جاتا ہے، اور یہ پیشہ معلّمی اور تدریس کے کامیاب ہتھیار ہیں۔ سمعی اور بصری اعانات سے مراد وہ سامان ہے جو تدریس کے عمل کو مؤثر، دلچسپ، واضح اور دیرپا بنانے کیلئے تدریس کے دوران استعمال کیا جائے۔

طریقہ ہائے تدریس ریاضی

(1) استقرائی طریقہ Inductive Method

روزمرہ زندگی میں بیسیوں ایسے واقعات پیش آتے ہیں کہ جن میں ہم اپنے مشاہدات ں روشنی میں نتائج اخذ کرتے ہیں۔مثال کے طور پر" سانپ ایک زہریلا جانور ہے"۔ "پانی ڈھلوان کی طرف بہتا ہے۔" "چیزیں اوپر سے نیچے کی طرف گرتی ہیں۔" یہ ایسے نتائج ہیں جو ہم نے اپنے تجربات اور مشاہدات پر قائم کئے ہیں۔اسی طرح الجبرا میں زیادہ تر کلیے استقرائی طریقہ سے اخذ کئے جاتے ہیں،مثلاً یہ کلیہ اخذ کرنا کہ

$$(x+a)\ (x+b) = x^2+(a+b)\,x+ab$$

اس کلیے کو سیکھنے سے پہلے طلباء الجبرا میں ضرب کے طریقے سے بخوبی آشنا ہیں۔اس مقصد کیلئے آسان قسم کی دو رکنی رقمیں لیکر طلباء کو ضرب دینے کیلئے کہا جائے مثلاً $x+5$ اور $x+7$ کی ضرب طلباء اس طرح کریں گے:

$$\begin{array}{l} x+5 \\ x+7 \\ \hline x^2+5x \\ \quad\ +7x+35 \\ \hline x^2+12x+35 \end{array}$$

ایسی بہت سی مثالیں لی جائیں اور تمام مثالوں کے نتائج تختہ سیاہ پر لکھے جائیں۔

$$(x+2)\ (x+3) = x^2+5x+6$$

$$(x+5)\ (x+6) = x^2+11x+30$$

$$(x-5)\ (x-3) = x^2-8x+15$$

$$(x+7)\ (x-4) = 2^2+3x-28$$

$$(x-11)\ (x+3) = x^2-8x-33$$

اب طلباء سے پوچھا جائے کہ بائیں طرف x اور دائیں طرف x^2 میں کیا تعلق ہے۔بائیں

بائیں طرف کے 2 اور 3 اور دائیں طرف کے 5 اور 6 میں کیا تعلق ہے۔ اور اسی قسم کے سوالات
تمام مثالوں کے بارے میں پوچھے جائیں۔ آخر میں طلبا خود یہ نتیجہ اخذ کریں گے کہ بائیں طرف کا x اور
دائیں طرف کا x ضرب کھا کر x^2 ہو جاتا ہے اور پوری ضرب کیلئے وہ یہ پورا نتیجہ اخذ کریں کہ ایک
طرف $x+$ اور دوسری طرف $x+$ کا حاصل ضرب x^2+ ہوگا، اور دونوں اعداد کا مجموعہ xx، دونوں
اعداد کے حاصل ضرب کو کلیہ کی صورت میں یوں لکھا جائے گا:

$$(x+a)\ (x+b) = x^2+(a+b)\ x+ab$$

چنانچہ اس طرح کی مثالیں اس وقت تک طلبہ سے حل کرائی جائیں جب تک وہ خود یہ کلیہ اخذ نہ کرلیں۔ لیکن بعض اوقات احتیاط کے باوجود استقرائی طریقہ سے اخذ کئے ہوئے کلیے زیادہ قابل اعتبار نہیں ہوتے۔ مثلاً x^2+x+41 میں x کی مختلف قیمتیں رکھنے سے یعنی 1, 2, 3------ رکھنے سے

(i) اگر $x=1$ تو $(1)^2+1+41 = 43$

$(2)^2+2+41 = 47$

$(3)^2+3+41 = 53$

اس سے یہ قیاس کیا جا سکتا ہے کہ اگر x ایک قدرتی عدد ہو تو اس جملے کی قیمت ایک مفرد عدد ہوگا۔ دیکھا جائے تو یہ قیاس غلط بھی ہو سکتا ہے۔ چنانچہ اگر $x=40$ تو

$$(40)2^2 40+41 = 1681$$

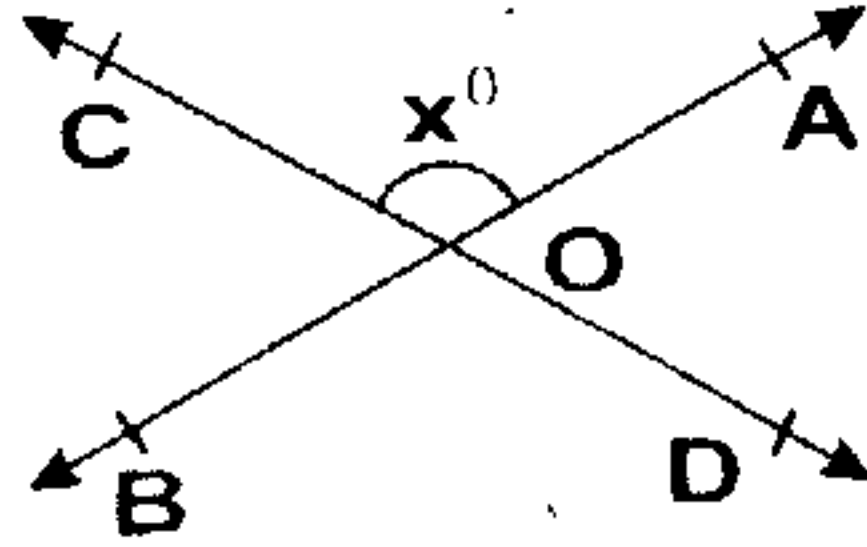
اور 1681 ایک مرکب عدد ہے۔ چنانچہ ریاضی کے اساتذہ کو چاہئے کہ ریاضی کی تدریس میں مختلف طریقہ ہائے تدریس استعمال میں لائیں۔ یا اگر استقرائی طریقہ تدریس ہی اپنانا ہے تو مثالیں کافی تعداد میں لی جائیں اور اتنی زیادہ بھی نہ ہوں کہ بچے کی اکتاہٹ کا سبب بن جائیں۔ اور مثالیں اتنی کم بھی نہ ہوں کہ بچے جلد بازی اور غلط قسم کی تعمیم کے عادی بن جائیں۔ نیز کلیہ اخذ کرنے کے بعد اگر ممکن ہو تو اس کی صحت کو کسی نہ کسی طریقہ سے جانچ لیا جائے۔

(2) استخراجی طریقہ Deductive Method

اگر ہمیں بتایا جائے کہ ''انسان فانی ہے۔'' تو اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ اکبر ایک

انسان ہے اس لئے وہ فانی ہے۔ احمد ایک انسان ہے اسلئے وہ فانی ہے وغیرہ وغیرہ۔ اُردو لغت میں دین کے معنی مذہب، ایمان دئے ہوتے ہیں اور مذہب کے معنی دیکھے جائیں تو دین، ایمان، اس لئے اگر ان دونوں میں سے کسی ایک چیز کا تصور نہ ہو تو لغت کے ذریعے یہ دونوں مطلب سمجھ میں نہیں آئیں گے۔ اسی طرح جیومیٹری میں ایک عام صداقت اور اصول ہے کہ:

اگر دو خطوط ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو قطع کریں تو اس طرح بننے والے راسی متقابہ زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔

اب ایک مقرون مثال لیکر AOC> اور BOD> راسی زاویہ بنائے اور اگر AOC> کی مقدار x^0 ہوئی تو BOD> کی مقدار لازماً x^0 ہوگی۔

اوپر والی مثال سے ظاہر ہوا کہ ریاضی پڑھانے کیلئے دراصل استخراجی طریقہ ہی استعمال کرنا چاہیے لیکن کلیات کو استعمال کرانے سے پہلے استقرائی طریقہ سے طلبہ سے اخذ کرائے جائیں۔ پھر اس قسم کے سوالات حل کرنے کیلئے استخراجی طریقہ استعمال میں لایا جائے۔

دراصل استخراجی طریقہ استقرائی طریقہ کا متضاد ہے۔ اس طریقہ تدریس میں ہم ایک اصول کی صداقت کو تسلیم کر لیتے ہیں اور منطقی استدلال کے ذریعے ضروری نتائج اخذ کرتے ہیں۔ مختلف نتائج کو اخذ کرنے کیلئے مختلف بیانات کی صداقت کو تسلیم کرنا ہوتا ہے۔ ان بیانات کو جن کی صداقت بغیر ثبوت کے تسلیم کر لی جاتی ہے بنیادی مفروضے کہتے ہیں۔ کچھ مفروضے ایسے ہوتے ہیں جو ریاضی کی مقداروں اور اعداد سے تعلق رکھتے ہیں:

مثلاً ''دو برابر مقداروں میں برابر مقداریں جمع کرنے سے مجموعے برابر رہتے ہیں۔

$$3 = 3$$

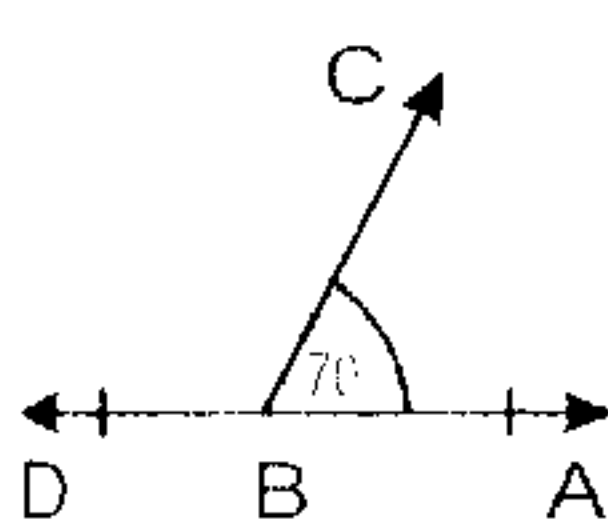
$$3+8 = 3+8 = 11$$

ایسے مفروضے کو اصول متعارفہ (Axioms) کہتے ہیں۔ کچھ مفروضے ایسے ہوتے ہیں جن کا تعلق جیومیٹری کی اشکال سے ہوتا ہے۔ مثلاً دو نقاط کے درمیان صرف اور صرف ایک ہی خط کھینچا جا سکتا ہے۔ ایسے مفروضے اصول موضوعہ Postulate کہلاتے ہیں۔

ان بنیادی مفروضوں اور تصورات کی مدد سے دوسرے تصورات اور اصطلاحات کی تعریف کی جاتی ہے اور اس طرح تصورات کی تعداد میں اضافہ ہوتا چلا جاتا ہے مثلاً ''مستطیل وہ متوازی الاضلاع ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔'' نیز چونکہ مربع کے ہر زاویہ کی مقدار 90° ہوتی ہے اور فرض کیا کہ ABCD ایک مربع شکل ہے اس لئے شکل ABCD کے ہر زاویہ کی مقدار 90° ہوگی۔

یہ بات یاد رہے کہ کسی بیان کو ثابت کرتے وقت ہمیں صرف اپنے تعریف شدہ یا غیر تعریف شدہ تصورات، بنیادی مفروضوں اور ثابت شدہ حقائق ہی کا سہارا لینا پڑتا ہے۔ لہٰذا ریاضی میں استعمال ہونے والی اصطلاحات کے مفہوم کو معین کرنے کیلئے ان کی واضح تعریفیں کر دینا ضروری ہوتا ہے مثلاً مستوی، خط اور نقطہ غیر تعریف شدہ اصطلاحات ہیں جن کی مدد سے ہم متوازی خطوط کی تعریف یوں کریں گے:

ایسے خطوط جو ایک دوسرے کو کسی نقطہ پر قطع نہ کریں اور ان کا درمیانی فاصلہ برابر رہے، متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔ اس طرح ایک اصول موضوع یہ ہے کہ:

اگر دو متصلہ زاویوں کے بیرونی باز و ایک ہی خط پر واقع ہوں تو ان کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

اب اگر $<ABC$ اور $<CBD$ متصلہ ہوں، جن کے غیر مشترک باز و $\overline{BA}$ اور $\overline{BD}$ ایک ہی خط پر ہوں اور $m<ABC = 70°$ ہو تو $m<CBD = 180°-70° = 110°$ ہوگی۔

الجبرا میں کلیہ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ کا استعمال یوں کرایا جا سکتا ہے کہ مندرجہ ذیل میں خالی جگہ پُر کریں۔

(1) $(4x+2y)^2 = (4x)^2+2(\text{..........})(\text{..........}) + (2y)^2$

(2) $(x+y)^3 = (x)^3+3(\ \ )^2(\ \ ) +3(\ \ )(\ \ )^2+(y^3)$

تحلیلی وترکیبی طریقہ تدریس Analytic and Synthetic Method

ریاضیائی مسئلوں میں کچھ امور ''معلوم'' ہوتے ہیں اور کچھ امور دریافت کرنے ''مطلوب'' ہوتے ہیں۔ظاہر ہے کہ مسئلے کے حل کیلئے ''امور معلوم'' اور ''امور مطلوب'' کی درمیانی کڑیاں تلاش کی جاتی ہیں۔ان کڑیوں کی تلاش کے مندرجہ ذیل دوطریقے ہیں۔

(i) ''امر معلوم'' سے شروع کر کے ''امر مطلوب'' تک پہنچنا ترکیبی طریق Analytic Method کہلاتا ہے۔

(ii) ''امر مطلوب'' کونقطہ آغاز سمجھ کر ''امر معلوم'' تک کا راستہ تلاش کرنا تحلیلی طریقہ Synthetic Method کہلاتا ہے۔

یاد رہے کہ ان دوطریقوں میں ترکیبی طریقہ تھوڑا مختصر ہوتا ہے جبکہ تحلیلی طریقہ نسبتاً لمبا ہوتا ہے۔چنانچہ ریاضی کی تدریس میں عموماً تحلیلی اور ترکیبی دونوں طریقے بیک وقت استعمال کئے جاتے ہیں۔ان کے استعمال کا طریقہ یہ ہے کہ کہ کسی مسئلے کے حل کیلئے پہلے زبانی طور پر تحلیلی حل سوچا جاتا ہے اوراس کی روشنی میں اس کا ترکیبی حل لکھا جاتا ہے۔

مثال نمبر 1 امر معلوم = بیان A درست ہے۔

امر مطلوب = بیان D درست ہے۔

بیان A کی صداقت یا درستگی اور بیان D کی صداقت یا درستگی کی درمیانی کڑیاں ترتیب وار مندرجہ ذیل ہیں۔

بیان D درست ہوگا اگر بیان C درست ہو۔

تحلیلی طریقہ: بیان C درست ہوگا بشرطیکہ بیان B درست ہو۔

بیان B درست ہوگا بشرطیکہ بیان A درست ہو۔

بیان A کی صداقت معلوم ہے اسلئے بیان D بھی درست ہے۔

ترکیبی طریقہ: چونکہ بیان A درست ہے اسلئے بیان B درست ہے۔

چونکہ بیان B درست ہے اسلئے بیان C درست ہے۔

چونکہ بیان C درست ہے اسلئے بیان D درست ہے۔

مثال نمبر 2 اسطرح الجبرا میں ان دو طریقوں کے استعمال کیلئے مندرجہ ذیل مثال مزید وضاحت کر رہی ہے۔

تحلیلی طریقہ: (i) $(a-b)^2$ کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے اگر
a^2+b^2-2ab کی قیمت معلوم ہو۔

(ii) ہم a^2+b^2-2ab کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں اگر
a^2+b^2 اور ab کی قیمتیں معلوم ہوں۔

(iii) a^2+b^2 اور ab کی قیمتیں معلوم ہیں اسلئے
$(a-b)^2$ کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

ترکیبی طریقہ: $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

فرض کریں $a^2+b^2 = 31$

$ab = 3$

تو $(a-b)^2 = 31 - 2(3)$

$= 31 - 6$

$= 25$

مندرجہ بالا تحلیلی اور ترکیبی طریقوں پر غور کرنے سے پتہ چلتا ہے کہ تحلیل میں ہر اقدام کیلئے جواز موجود ہے اور یہی جواز ترکیبی طریقہ کیلئے رہنمائی فراہم کرتا ہے۔ نیز تحلیل سوچنے کی چیز ہے اور اس کی مدد سے ترکیبی حل مختصر لکھا جاسکتا ہے۔

مثال نمبر 3 فرض کریں کہ ایک دائرے کا رقبہ 616 مربع میٹر ہے اور ایک کھلاڑی کو 440 میٹر کی دوڑ لگانے کیلئے اس میدان کے کتنے چکر لگانے پڑیں گے۔

معلوم دائرے کا رقبہ = 616 مربع میٹر

کل فاصلہ = 440 میٹر

مطلوب = 440 میٹر دوڑنے میں چکروں کی تعداد

تحلیلی طریقہ:

(i) چکروں کی تعداد معلوم کی جا سکتی ہے اگر کل فاصلہ اور ایک چکر کا فاصلہ معلوم ہو۔

(ii) کل فاصلہ تو معلوم ہے لہٰذا ہمیں ایک چکر کا فاصلہ معلوم کرنا چاہیئے ، اس لئے دائرے کا محیط معلوم کرنا چاہیئے۔

(iii) محیط معلوم کیا جا سکتا ہے اگر رداس معلوم ہو۔

(iv) رداس معلوم کیا جا سکتا ہے اگر رقبہ معلوم ہو۔ جو امر معلوم ہے۔

پس معلوم اور مطلوب کی درمیانی کڑیاں مندرجہ ذیل ہوں گی۔

چکروں کی تعداد کیلئے محیط ، محیط کیلئے رداس اور رداس کیلئے رقبہ معلوم ہونا ضروری ہے۔

مندرجہ بالا تحلیل کی روشنی میں ترکیبی طریقہ یوں استعمال ہوگا۔

دائرے کا رقبہ 616 مربع میٹر

اور دائرے کا رقبہ $\pi \times r^2$

پس $\pi r^2 =$ 616 مربع میٹر

Radius = r = رداس

اور $\pi = \frac{22}{7}$

لہٰذا $\frac{22}{7} \times r^2 =$ 616 مربع میٹر

$$\frac{22}{7} \div 616 = r^2$$

$$196 = \frac{7}{22} \times 616 = r^2$$ میٹر (616 اور 22 کاٹ کر 28)

$$\sqrt{196} = \sqrt{r^2}$$

پس رداس = 14 میٹر

دائرے کا محیط = $\pi \times r \times 2$ = ایک چکر میں طے کردہ فاصلہ

پس ایک چکر میں فاصلہ = $\frac{22}{7} \times 14 \times 2$ میٹر (14 اور 7 کاٹ کر 2)

چونکہ کل فاصلہ = 440 میٹر

پس چکروں کی تعداد = $\frac{440}{88} = 5$ (440 اور 88 کاٹ کر)

مائیکرو تدریس(Micro Teaching)

یہ ایک حقیقی کمرہ جماعت کی تدریس ہے جس میں طلبہ کی تعداد بھی کم ہوتی ہے اور وقت بھی کم ہوتا ہے۔ اس طریقہ میں طلبہ کی تعداد عموماً 15-10 اور تدریسی وقفہ 20-5 منٹ ہوتا ہے۔

مائیکرو تدریس کے بنیادی اجزاء:

(1) اس میں کمرہ جماعت کی پیچیدگیوں کو آسان بنادیا جاتا ہے۔

(2) اس طریقہ میں زیادہ زور ایک خاص قسم کی تربیت کی تکمیل پر ہوتا ہے۔

(3) سبق پر زیادہ سے زیادہ کنٹرول حاصل کیا جاتا ہے۔

(4) فوری جائزہ لینے سے تدریسی رویہ میں جلد سے جلد اصلاح ہوتی ہے۔

مائیکروتدریس کا طریقہ کار:

یہ پرانے اساتذہ کو نئی فنی مہارتیں سیکھنے اور پرانی مہارتوں کو بہتر بنانے کا موقع دیتی ہے۔

اس تدریس میں مندرجہ ذیل اقدامات ہیں:

(1) سب سے پہلے عملی طور پر تدریسی مہارت کا کرداری انداز میں تجزیہ کرنا ہوتا ہے۔ اور زیر تربیت اساتذہ کے سامنے تدریسی مہارت کے مقاصد کی وضاحت ہوتی ہے۔

(2) دوسرے مرحلہ میں تدریسی مہارت VTR طلبہ کے سامنے بطور نمونہ پیش کیا جاتا ہے۔

(3) زیر تربیت استاد کسی ایسے مضمون کا سبقی اشارہ تیار کرتا ہے جس میں اسے دلچسپی ہوتی ہے۔

(4) زیر تربیت استاد 10-5 طلبہ کو پڑھاتا ہے جس کو ویڈیو ٹیپ کرلیا جاتا ہے۔

(5) سبق کے خاتمے پر زیر تربیت استاد اپنے نگران اساتذہ کو ویڈیو ٹیپ پر اپنے پڑھائے ہوئے سبق کا مشاہدہ کرتا ہے اور پھر اس کا تنقیدی جائزہ لیا جاتا ہے۔

(6) زیر تربیت استاد اپنے ذاتی تجربہ اور نگران اساتذہ کی رائے کی روشنی میں دوبارہ سبقی اشارہ تیار کرتا ہے اور اصلاح شدہ سبق طلبہ کے نئے گروپ کو پڑھایا جاتا ہے اور پھر نگران استاد اس سبق کا تنقیدی جائزہ لیتا ہے اور کمزوریوں کی نشاندہی کرتا ہے۔

قوت نما کے قوانین

ذیلی عنوانات: (1) قوتوں کے حاصل ضرب کا قانون

(2) حاصل ضرب کی قوتوں کا قانون

وقت: ایک پیریڈ 40 منٹ

مقاصد: طلبہ کو اس قابل بنانا کہ وہ

(1) قوتوں کے حاصل ضرب

(2) حاصل ضرب کی قوت کے قوانین کو سمجھ کر ان کا اطلاق کرسکیں۔

طریقہ تدریس: استقرائی۔ انکشافی

تدریسی معاونات: تختہ سیاہ، چاک، ڈسٹر، کاغذ، قلم

سابقہ واقفیت کا جائزہ:

طلبہ جانتے ہیں کہ a^1 سے کیا مراد ہے اور اس میں اساس اور قوت نما کیا ہے۔ نیز یہ بھی جانتے ہیں کہ $(-a)^1$ کو a^1- لکھ سکتے ہیں۔ اور $1a^1$ میں قوت نما معلوم کرنے (یعنی a^1 معلوم کرنے) کا عمل پہلے اور 1 سے ضرب دینے کا عمل بعد میں کیا جاتا ہے اور یہ کہ کسی قوت نمائی جملے کی علامت کا تعین کیسے کیا جاتا ہے۔ اس قسم کے سوالات پوچھے جائیں۔ اس کے بعد طلبہ سے کہا جائے کہ ہم قوت نماؤں کے قوانین اخذ کرنے کی کوشش کریں گے۔ مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

(1) $5^3 \times 5^8 = (5\times5\times5)\,(5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5)$

$= 5^{11} = 5^{3+8}$

(2) $(-a)^3 \times (-a)^4 = [(-a)\,(-a)\,(-a)]\,[(-a)\,(-a)\,(-a)\,(-a)]$

$= (-a)^7 = (-a)^{3+4}$

(3) $\left(\frac{5}{11}\right)^4 \times \left(\frac{5}{11}\right)^5$

$=\left(\frac{5}{11}\times\frac{5}{11}\times\frac{5}{11}\times\frac{5}{11}\right)\left(\frac{5}{11}\times\frac{5}{11}\times\frac{5}{11}\times\frac{5}{11}\times\frac{5}{11}\right)$

$=\left(\frac{5}{11}\right)^9=(5)^{4+5}$

(4) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 \qquad = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^6 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{3+3}$

سرگرمی نمبر 1: اب طلبہ سے پوچھا جائے کہ آپ نے ان مثالوں سے کیا نتیجہ اخذ کیا۔

عام طور پر طلباء اسے یوں لکھیں گے۔

$$a^{r}+a^{s}=a^{r+s}$$

ممکنہ جوابات

اگر اساس ایک ہی ہو تو قوتوں کے حاصل ضرب میں اساس وہی رہتا ہے اور قوت نما جمع ہو جاتے ہیں۔

اگر r اور s ناطق اعداد ہوں تو پھر بھی یہ قانون درست رہے گا۔ اس قانون میں مزید توسیع بھی کی جا سکتی ہے۔

اگر $a \in R \quad r,s,t......Q$

جبکہ Q سے مراد ناطق اعداد کا سیٹ ہے۔ تو

$$a^{r}xa^{s}xa^{t}=a^{r+s+t}$$

اب ہم اس قانون کا اطلاق جملوں کو مختصر کرنے میں کر سکتے ہیں۔ اسے قوتوں کی حاصل ضرب کا قانون کہتے ہیں۔

مثال نمبر 1: مختصر کریں:

$$l^{3}xm^{4}xn^{5}xn^{2}xm^{-8}xl^{-15}$$

$$= l^{3}xm^{4}xn^{6}xn^{2}xm^{-8}xl^{15}$$

$$= l^{3}xl^{15}xm^{4}xm^{-8}xn^{6}xn^{2}$$

$$= l^{3-15}xm^{4-8}xn^{6+2}$$

$$= l^{-12}xm^{-4}xn^{8}$$

$$= l^{-12}\ m^{-4}\ n^{8}$$

مثال نمبر 2:

$$(\frac{a}{b})^{-4}x(\frac{a}{b})^{\frac{2}{3}}x(\frac{C}{m})^{\frac{1}{2}}x(\frac{C}{m})^{8}$$

ممکنہ جوابات

$$(\frac{a}{b})^{4}x(\frac{a}{b})^{\frac{2}{3}}x(\frac{C}{m})^{\frac{1}{2}}x(\frac{C}{m})^{8}$$

$$(\frac{a}{b})^{-4+\frac{2}{3}}x(\frac{C}{m})^{\frac{1}{2}+8}$$

$$(\frac{a}{b})^{\frac{-10}{3}}x(\frac{C}{m})^{\frac{17}{2}}$$

مندرجہ ذیل پر غور کریں۔

(i) $(8 \times 5)^4 = (8 \times 5) \times (8 \times 5) \times (8 \times 5) \times (8 \times 5)$
$= 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
$= 8^4 \times 5^4$

(ii) $\left[\frac{3}{\sqrt{7}} \times (-3)\right]^3$

$= \left[\frac{3}{\sqrt{7}} \times (-3)\right]\left[\frac{3}{\sqrt{7}} \times (-3)\right]\left[\frac{3}{\sqrt{7}} \times (-3)\right]$

$= \left[\left(\frac{3}{\sqrt{7}} \times \frac{3}{\sqrt{7}} \times \frac{3}{\sqrt{7}}\right)((-3) \times (-3) \times (-3)\right]$

$= \left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^3 \times (-3)^3$

سرگرمی نمبر 2:

مندرجہ بالا مثالوں سے ہم کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔

علامتوں میں اس نتیجہ کو ہم یوں لکھیں گے:

$$(a \times b)^r = a^r . b^r$$

اسے حاصل ضرب کی قوت کا قانون کہتے ہیں۔

مثال نمبر 3:

$(8ab)^4$ کو مختصر کریں۔

$(8ab)^4 = 8^4 a^4 b^4$

$= 4096\ b^4\ b^4$

مثال نمبر 4: $(3 \times 5 \times x y)^3$ کو مختصر کریں۔

$(3 \times 5 \times xy)^3 = 3^3 \times 5^3 \times x^3 \times y^3 = 27 \times 125 \times x^3 y^3$

$= 3375 x^3 y^3$

جائزہ: ریاضی کی درسی کتاب سے متعلق مشقیں کرنے کو دی جائیں۔

لاگرتھم

وقت: 40+40+40+40 (چار تعلیمی گھنٹے)

جماعت: نہم، دہم

مقاصد: (1) ضرب اور تقسیم کے طویل اور مشکل عوامل کو لاگرتھم کی مدد سے جمع اور تفریق کے آسان اور سہل عوامل میں تبدیل کرنا۔

(2) اعداد کی قوتیں اور جذر معلوم کرنے کیلئے لاگرتھم کا استعمال۔

طریقہ تدریس: دریافتی / تجرباتی / مشاہداتی

تدریسی معلومات: (1) لاگرتھم کی تعریف

(2) عام لاگرتھم، اس کا خاصہ Characteristic اور Mantissa میئیسہ معلوم کرنا۔

(3) ضد لاگرتھم (Anti Logrithm)

(4) لاگرتھم کے بنیادی قوانین

(5) لاگرتھم کا استعمال

سابقہ واقفیت: (1) حقیقی اعداد اور ان کے خواص

(2) اساس، قوت نما، اور جذر

(3) قوتوں کے قوانین

(4) حقیقی اعداد کا q واں جذر

لاگرتھم کی تعریف: a اور y کوئی سے دو حقیقی اعداد ہیں اور $a>0$ اور $a\neq 1$

اگر $a^y=x$ ہو تو ہم y کو a کی اساس پر x کا لاگرتھم کہتے ہیں اور اسے یوں لکھتے ہیں۔

$$y = \log_{a}^{x}$$

مساوات: $a^y=x$ کو قوت نمائی شکل اور $y = \log_{a}^{x}$ کو اس کی لاگرتھم شکل کہتے ہیں۔

مندرجہ بالا تعریف کی رو سے $a^Y = x \iff y = \log_a^x$

یعنی دونوں مترادف ہیں۔ (یہ علامت $\iff$ مترادف کی ہے)

معروضی سوالات:

(1) $5^4 = 625$ کی لاگرتھمی شکل .... ہے

(2) $a^{\frac{1}{3}} = b$ کی لاگرتھمی شکل .... ہے

(3) $\log_2 64 = 6$ کی قوت نمائی شکل .... ہے

(4) $\log_p 83 = \frac{1}{6}$ کی قوت نمائی شکل .... ہے

(5) اگر $\log_{49} x = -\frac{3}{2}$ تو .... $x =$

(6) اگر $\log_{10} x = 1000$ تو .... $x =$

(7) اگر $\log_x 81 = 4$ تو .... $x =$

عام لاگرتھم (Common Logrithom)

وہ لاگرتھم جن میں اساس 10 ہو، عام لاگرتھم کہلاتے ہیں۔ ہم اس سبق میں زیادہ تر عام لاگرتھم ہی استعمال کریں گے۔ اگر n ایک مثبت حقیقی عدد ہو اور ہمیں $\log_{10} n = x$ کو حل کرنا ہو یا دوسرے الفاظ میں مساوات $10^x = n$ کا حل معلوم کرنا ہے۔

اب

$$10^0 = 1 \iff \log_{10}^1 = 0$$

$$10^1 = 10 \iff \log_{10}^{10} = 1$$

$$10^2 = 100 \iff \log_{10}^{100} = 2$$

$$10^3 = 1000 \iff \log_{10}^{1000} = 3$$

$$10^4 = 10000 \iff \log_{10}^{10000} = 4$$

ان مثالوں سے ہمیں معلوم ہوا کہ:

(1) اگر کوئی عدد 1 اور 10 کے درمیان ہو تو اس کے لاگرتھم کی قیمت 0 اور 1 کے درمیان ہوگی۔

(2) اگر کوئی عدد 10 اور 100 کے درمیان ہو تو اس کے لاگرتھم کی قیمت 1 اور 2 کے درمیان ہوگی۔

(3) اگر کوئی عدد 100 اور 1000 کے درمیان ہو تو اس کے لاگرتھم کی قیمت 2 اور 3 کے درمیان ہوگی۔

علیٰ ہذا القیاس

فرض کریں کہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$10^{0.734} = 5.42 \text{------}$$

یعنی

$$\log_{10} 5.42 = 0.734$$

اگر مساوات (i) کے طرفین کو 10 سے ضرب دیں تو ہمیں حاصل ہوگا۔

$$10^{0.734} \times 10^{1} = 5.42 \times 10$$

$$10^{1.734} = 54.2$$

$$\log_{10}^{54.2} = 1.734$$

اب اگر مساوات (i) کے طرفین کو 100 ضرب دیں تو ہمیں حاصل ہوگا۔

$$10^{0.734} \times 10^{2} = 5.42 \times 10^{2}$$

یعنی

$$10^{2.734} = 542$$

لاگرتھمی شکل میں

$$\log^{542} = 2.734$$

اور اسی طرح اگر مساوات (i) کے طرفین کو 1000 سے ضرب دیں تو

$$10^{0.734} \times 10^{3} = 5.42 \times 10^{3}$$

$$10^{3.734} = 5420$$

لاگرتھمی شکل میں

$$\log 5420 = 3.734$$

اب اگر ہم مساوات (i) کے طرفین کو 10^{-1} سے ضرب دیں تو ہمیں حاصل ہوگا۔

$$10^{0.734} \times 10^{-1} = 5.42 \times 10^{-1}$$

یعنی

$$10^{-1+0.734} = 0.542$$

لاگرتھمی شکل میں

$$\log_{10} 0.542 = -1+0.734$$

اس طرح مساوات (i) کے طرفین کو 10^{-2} سے ضرب دینے سے حاصل ہوگا۔

$$\log_{10} 0.542 = -2+0.734$$

وغیرہ وغیرہ

اوپر دی گئی مثالوں کا مشاہدہ کرنے پر ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ کسی عدد کے لاگرتھم کے دو حصے ہوتے ہیں۔ ایک صحیح عددی حصہ اور دوسرا اعشاری یا کسری حصہ۔ صحیح عددی حصہ کو لاگرتھم کا خاصہ کہتے ہیں اور اعشاری یا کسری حصہ کو لاگرتھم مینٹیسہ کہتے ہیں۔ لاگرتھم کا خاصہ مثبت یا منفی ہوسکتا ہے۔ جدول کا استعمال کرنے کیلئے مینٹیسہ مثبت لیا جاتا ہے۔ اگر کیلکولیٹر کا استعمال کیا جائے تو مینٹیسہ بھی منفی ہوسکتا ہے۔

اوپر دی ہوئی مثالوں سے یہ بات بھی واضح ہے کہ خاصے کا انحصار عدد میں نقطہ اعشاریہ کے مقام پر ہے۔ اور مینٹیسہ کا انحصار عدد میں ہندسوں کی ترتیب پر ہے۔ خاصہ معلوم کرنے کیلئے ہمیں دی ہوئی عدد میں حوالے کا مقام کا تعین کرنا ہوتا ہے۔ بائیں طرف سے پہلے غیر صفر ہندسے کے فوراً بعد حوالے کا مقام ہوتا ہے۔ حوالے کے مقام کو علامت '^' سے ظاہر کرتے ہیں۔ اسی عدد کے لاگرتھم کا خاصہ ان ہندسوں کی تعداد پر ہوگا جو نقطہ اعشاریہ اور حوالے کے مقام کے درمیان ہوگا۔

مثلاً log 5 ^ 63.4 کا خاصہ 2 ہے۔

log 5 ^ .321 کا خاصہ 0 ہے۔

(کیونکہ مقام اعشاریہ اور حوالے کے مقام کے درمیان ہندسوں کی تعداد صفر ہے۔)

(منفی خاصہ والے لاگرتھم کورس میں شامل نہیں)

مینٹیسہ معلوم کرنے کیلئے اعشاریہ کو وقتی طور پر نظر انداز کر دیا جاتا ہے مثلاً اگر ہمیں log2.476 کا مینٹیسہ معلوم کرنا ہو تو ہم اعشاریہ کو نظر انداز کر کے عدد 2476 حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم 24 کو جدول کے بائیں سے پہلے کالم میں تلاش کریں گے۔ پہلی سطر میں 7 کے کالم میں 24 کے سامنے 3927 لکھا ہے اور اس عدد کے سامنے فرق والے کالموں میں پہلی قطار میں 6 کے نیچے 11 کا عدد ہے۔ ہم 11 کو 3927 میں جمع کرتے ہیں۔ تو عدد 3988 حاصل ہوتا ہے۔ پس log 2.476 کا مینٹیسہ log 2.476 = 0.3938

معروضی سوالات:

(1) log 1919 کا خاصہ = ---------------

log 1919 کا مینٹیسہ = ---------------

log 1919 = ------------

(2) log 568.2 کا خاصہ = ---------------

log 568.2 کا مینٹیسہ = ---------------

log 568.2 = ------------

(3) log 45.94 کا خاصہ = ---------------

log 45.94 کا مینٹیسہ = ---------------

log 45.94 = ------------

(4) log 7.2 کا خاصہ = ---------------

log 7.2 کا مینٹیسہ = ---------------

log 7.2 = ------------

(5) log 5 کا خاصہ = ---------------

log 5 کا مینٹیسہ = ---------------

log 5 = ------------

ضدلاگرتھم (Anti Logrithm)

فرض کریں ہمیں مساوات log x=y میں y معلوم ہے اور x معلوم کرنا ہے۔ ایسا کرنے کیلئے ہم ضد لاگرتھم کے جدول کا استعمال کریں گے۔ اس مقصد کیلئے ہم اوپر دی گئی مساوات کو x=Anti log y کی شکل میں لکھیں گے۔

فرض کریں کہ $\log x = 2.8253$

ضد لاگرتھم کے جدول میں .82 کو پہلے کالم میں تلاش کریں گے۔

.82 کے سامنے اور پہلی سطر میں 5 والے کالم میں 6683 موجود ہے۔

اب 6683 والی سطر میں فرق والے کالموں میں 3 کے نیچے 5 لکھا ہے۔

6683 میں 5 جمع کریں تو عدد 6688 حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ log x کا خاصہ 2 ہے، اس لئے x کی قیمت میں نقطہ اعشاریہ اور حوالے کے درمیان 2 ہندسے ہیں۔

لہٰذا $x = \text{antilog } 2.8253$

$= 6 \wedge 68.8$

معروضی سوالات:

(1) اگر $\log x = 1.2602$ تو $x =$ ____________

(2) اگر $\log x = 2.6806$ تو $x =$ ____________

(3) اگر $\log x = 3.9595$ تو $x =$ ____________

(4) اگر $\log x = 0.9009$ تو $x =$ ____________

(5) اگر $\log x = 0.0001$ تو $x =$ ____________

لاگرتھم کے بنیادی قوانین:

مندرجہ ذیل قوانین کی مدد سے ضرب اور تقسیم کے عوامل جمع اور تفریق کے عملوں میں بدلے جاسکتے ہیں۔

$a \neq 1, \quad a > 0, \quad m, n > 0$

(i) $\log_a^{mn} = \log_a^m + \log_a^n$

(ii) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a^m - \log_a^n$

(iii) $\log_a m^n = n \log_a^m$

ان قوانین کو ثابت کرنا اگرچہ کہ کورس میں شامل نہیں ہے تاہم طلبہ کی دلچسپی کیلئے ان کا ثبوت دیا جارہا ہے۔

فرض کریں $\log_a^m = x$

اور $\log_a^m = y$

قوت نمائی شکل میں یہ مساوات یوں لکھی جاسکتی ہے۔

$a^x = m \qquad (1)$

$a^y = n \qquad (2)$

لہٰذا

$a^x . a^y = mn$

$a^{x+y} = mn$

یا

لاگرتھمی شکل میں

$\log^a mn = x+y$

$= \log_a^m + \log_a^n$

مساواتوں (1) اور (2) سے

$\frac{a^x}{a^y} = \frac{m}{n}$

یا

$a^{x-y} = \frac{m}{n}$

لاگرتھمی شکل میں

$\log_a \frac{m}{n} = x - y$

$= \log_a m - \log_a n$

مساوات(1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $(a)^{xn} = m^n$

یا $a^{nx} = m^n$

لاگرتھمی شکل میں $\log_a m^n = nx$

$= n \log_a m$

معروضی سوالات:

(1) log mnp = ---------- + ----------- + ------------

(2) log 2xy = ---------- + ----------- + ------------

(3) log mn/p = ---------- + ----------- - ------------

(4) log $(m^p.n^q)$ = ---------- + -----------

(5) log m/np = ---------- - ----------- - ------------

(6) log m^p/n^q = ---------- - -----------

(7) log2+log3+logm = ----------

(8) log x - 2log y = log ----------

(9) 2log 9 - 3log8 = log ----------

لاگرتھم کا استعمال

مثال: (9.566) (72.49) (238.2) کی قیمت لاگرتھم کی مدد سے معلوم کریں۔

فرض کریں کہ x = (238.2) (72.49) (9.566)

log x = log238.2+log72.49+log9.566

log 2^38.2 = 2.3770

log 7^2.49 = 1.8602

log 9^.566 = 0.9808

$$\log x = 2.3770+1.8602+0.9808$$

$$= 5.2180$$

$$x = \text{Anti}\log 5.2180$$

$$= 165200$$

مثال نمبر 2: فرض کریں کہ $x = \frac{475.8}{13.72}$

$$\log x = \log 475.8 - \log 13.72$$

log 4^75.8 = 2.6774

log 1^3.72 = 1.1374

$$\log x = 2.6774 - 1.1374$$

$$= 1.5400$$

$$x = \text{antilog } 1.5400$$

$$= 34.67$$

مثال نمبر 3: $(6.237)^3$ معلوم کریں۔

فرض کریں کہ $x = (6.237)^3$

$$\log x = 3\log 6.237$$

$$= 3(0.7950)$$

$$= 2.3850$$

$$x = \text{Antilog } 2.3850$$

$$= 242.7$$

مثال نمبر 4: $\dfrac{(84.5)^{\frac{1}{3}}\ \sqrt{39.7}}{\sqrt{23.4}}$ معلوم کریں۔

فرض کریں کہ

$$x = \frac{(84.5)^{\frac{1}{3}}\ \sqrt{39.7}}{\sqrt{23.4}}$$

$$\log x = \log (84.5)^{\frac{1}{3}} + \log \sqrt{39.7} - \sqrt{23.4}$$

$$= \tfrac{1}{3}\log (84.5) + \tfrac{1}{2}\log 39.7 - \tfrac{1}{2}\log 23.4$$

$$= \tfrac{1}{3}(1.9269) + \tfrac{1}{2}(1.5988) - \tfrac{1}{2}(1.3692)$$

$$= 0.6423 + 0.7994 - 0.6846$$

$$= 0.7571$$

$$x = \text{Antilog } 0.7571$$

$$= 5.716$$

سوالات: لاگرتھم کی مدد سے قیمت معلوم کریں۔

(1) $4.97 \times 2.47 \times 6.89$

(2) $\dfrac{47.58}{13.72}$

(3) $\dfrac{8.57 \times 24.7}{88.9}$

(4) $(6.237)^3$

(5) $(77.2)^3 \quad \sqrt{28.31}$

(6) $\sqrt{0.9723}$

یک درجی ہمزاد مساواتوں کا حل بذریعہ قالب

وقت: 40 منٹ

جماعت: نہم۔ دہم

مقاصد: اس سبق کی تکمیل کے بعد طلبہ نہ صرف ریاضی میں یک درجی ہمزاد مساواتوں کو بذریعہ قالب حل کر سکیں گے بلکہ اس کا اطلاق کیمیا اور طبیعات کے مسائل پر بھی کر سکیں گے۔

طریقہ تدریس: استخراجی طریقہ

تدریسی معاونات: تختہ سیاہ۔ چاک۔ ڈسٹر

سابقہ واقفیت: طلبہ سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ مندرجہ ذیل واقفیت رکھتے ہیں۔

(1) قالبوں کی ضرب

(2) قالب کا ضربی معکوس معلوم کرنا

تمہیدی سوالات: طلباء کی واقفیت کا اندازہ مندرجہ ذیل سوالات سے کیا جائے گا۔

	ممکنہ جوابات
(1) کسی قالب A کا مطلق کیا ہے۔	(1) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\|A\| = ad - bc$
(2) قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} کب ممکن ہے۔	(2) جب $\|A\| \neq 0$
(3) اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix} l & m \\ n & k \end{bmatrix}$ تو AB کیا ہوگا۔	(3) $AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m \\ n & k \end{bmatrix}$

(4) اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو

A کا ضربی معکوس A^{-1} کیا ہوگا۔

(4) $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

جبکہ $|A| = ad - bc$

(5) اب اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

اور $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

تو AB کیا ہوگا۔

(5) $$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

(6) اگر A اور B دو درجی قالب ہوں

یعنی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$

تو A اور B کب برابر ہوں گے۔

(6) $A = B$

اگر

$a = a_1$

$b = b_1$

$c = c_1$

$d = d_1$

اگر $\begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

تو $ax + by = m$

$cx + dy = n$

یا اگر دیا ہوا ہو کہ

$ax + by = m$

$cx + dy = n$

تو ہم انہیں قالبوں کی صورت میں یوں لکھیں گے

$$\begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

یا قالبوں کی ضرب کی رُو سے

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

اگر ہم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ لیں

تو مندرجہ بالا مساوات یوں بن جائے گی۔

$$AX = B \qquad \text{(ii)}$$

یہاں قالب A کو ہمزاد مساواتوں کیلئے خطی تحویل کا قالب کہتے ہیں۔
اب $AX = B$ میں سے x اور y کی قیمت معلوم کرنے کیلئے دونوں اطراف کو A کے ضربی معکوس سے ضرب دیں گے۔ لہٰذا

$$A^{-1} \quad AX = A^{-1} B$$

$$(A^{-1} A) \quad X = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B \qquad \text{(iii)}$$

اب چونکہ $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$

لہٰذا A^{-1} اور B کی قیمتیں جمع کرنے سے

$$A^{-1} B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

(iii) میں قیمتیں درج کرنے سے

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} dm - bn \\ -cm + an \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} (dm - bn) \\ \frac{1}{ad - bc} (-cm + an) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dm - bn}{ad - bc} \\ \frac{-cm + an}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

ہم جانتے ہیں کہ دو قالب مساوی ہونگے۔ اگر ان کے متناظرہ عناصر آپس میں مساوی ہوں۔

$$x = \frac{dm - bn}{ad - bc}$$

$$y = \frac{-cm + an}{ad - bc}$$

پس دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا حل سیٹ مندرجہ ذیل ہوگا۔

$$\left\{\left(\frac{dm - bn}{ad - bc}, \frac{-cm + an}{ad - bc}\right)\right\}$$

مثال:

$$X - 2y = 1$$

$$3x + y = 10$$

دوسرا قدم

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \times 1 - 3(-2)$$

$$= 1 + 6 = 7 \neq 0$$

$|A| \neq 0$ کا مطلب ہے کہ ہم دی ہوئی مساواتوں کو حل کر سکتے ہیں۔

تیسرا قدم

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

چوتھا قدم

$$A^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 10 \\ -3 \times 1 + 1 \times 10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 + 20 \\ -3 + 10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 21 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \times 21 \\ \frac{1}{7} \times 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پانچواں قدم

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حل سیٹ $\{(3, 1)\}$

جائزہ:

معروضی سوالات:

(1) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ تو $|A|$ کی قیمت ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ ہوگی۔

(2) A^{-1}، قالب A کا ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ کہلاتا ہے۔

(3) اگر $|A| = 0$ تو A کو ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ قالب کہتے ہیں۔

(4) قالب A کا ضربی معکوس کب ممکن ہے؟

(5) کیا $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

گھر کا کام:

طلبہ درسی کتاب کی مشق نمبر 6.5 میں سوال نمبر 4, 6, 8 حل کر کے لائیں۔

جیومیٹری

تعارف

جیومیٹری علم ریاضی کی ایک شاخ ہے۔ لفظی اعتبار سے یہ دونوں لاطینی الفاظ "جیو" اور "میٹری" کا مرکب ہے۔ جیو کا مطلب زمین اور میٹری کا مطلب پیمائش سے متعلق ہے۔ لہذا بنیادی طور پر یہ علم زمین کی پیمائش سے شروع ہوا۔ دیگر علوم کی طرح اس علم نے بھی زمانہ گزرنے کے ساتھ ترقی کی اور ایک سائنس کی شکل اختیار کر لی جو مختلف اجسام یا اشیاء کی پوزیشن، اشکال اور حجم سے بحث کرتا ہے۔ اس علم کی ترویج اور ترقی میں یونانی ریاضی دانوں کا بہت بڑا حصہ ہے۔ ان میں یوکلڈ (Euclid) ریاضی دان کا نام سرفہرست ہے۔ اس نے علم جیومیٹری کو منطقی بنیاد فراہم کی اور بہت سے مسائل تخلیق کر کے ان کے منطقی ثبوت فراہم کیے۔

جیومیٹری پڑھانے کے مقاصد:

یونانی فلاسفر جیومیٹری کے علم پر مکمل عبور کو فلسفہ کی تعلیم کیلئے بنیادی ضرورت تصور کرتے تھے۔ ان کے خیال کے مطابق جیومیٹری کے تصورات پر عبور انسان کے اندر منطق اور استدلال کی قوتوں کو اجاگر کرتا ہے۔ ان کا خیال آج بھی درست نظر آتا ہے۔ بلکہ اگر یہ کہا جائے تو زیادہ مناسب ہوگا کہ جیومیٹری کی مختلف شاخوں کی ترویج اور انکشاف سے یہ خیال پایہ تکمیل کو پہنچ چکا ہے۔

(1) یہ علم ریاضیاتی طرز تفکر کیلئے بنیاد فراہم کرتا ہے۔

(2) اس علم کے ذریعے ہم کائنات میں تناسب اور مشابہت کا عمدگی کے ساتھ مطالعہ کر سکتے ہیں۔

(3) یہ علم انجنیرنگ، فن تعمیر اور سائنس کی دیگر شاخوں کے مطالعہ اور تحقیق میں کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

دو مثلثوں کا تماثل

جماعت: نہم۔ دہم

وقت: 40 منٹ

عام مقاصد: تماثل کی بنیادی اہمیت اور ضرورت سے روشناس کرانا۔

مقاصد خصوصی:

(1) طلبہ پر مثلثوں کے تماثل کا مفہوم واضح کرنا۔

(2) طلبہ کو اس قابل بنانا کہ وہ دو مثلثوں کے درمیان تماثل کے ہونے یا نہ ہونے کا فیصلہ کر سکیں۔

(3) مثلثوں کے تماثل کے اطلاق کی وضاحت کرنا۔

طریقہ تدریس: مشاہداتی / دریافتی طریقہ

تدریسی معاونات:

جیومیٹری بکس، چاک، ڈسٹر، تختہ سیاہ، کاغذ، قینچی، پنسل

سابقہ واقفیت	ممکنہ جوابات
1- مثلث کے اجزاء سے کیا مراد ہے؟	مثلث کے اجزاء سے مراد اس کے تین ضلع اور تین زاویے ہیں۔ اس طرح مثلث کے کل چھ اجزاء ہوتے ہیں۔
2- مثلث ABC کے چھ اجزاء کون کونسے ہیں۔	مثلث ABC کے چھ اجزاء یہ ہیں: $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ <A, <B, <C

3- آپ پچھلی جماعتوں میں دو سیٹوں کے درمیان (1 - 1) مطابقت قائم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ کوئی سے دو سیٹ لے کر (1 - 1) مطابقت قائم کریں۔

$1 \longleftrightarrow a, \quad 2 \longleftrightarrow b, \quad 3 \longleftrightarrow c,$

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c\}$

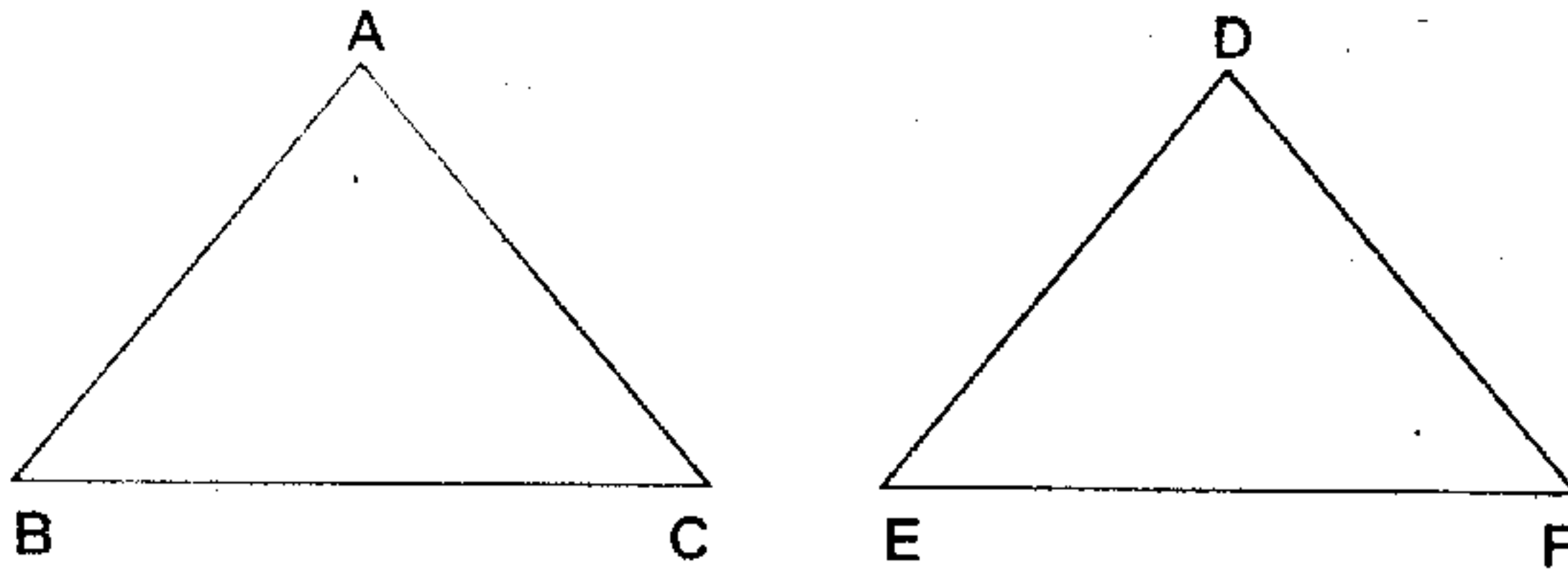
اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$
$B = \{1, 3, 5, 7\}$
ان دو سیٹوں کے درمیان (1 - 1) مطابقت قائم کر کے دکھائیں۔

سرگرمی نمبر 1:

آیئے اب ہم سب سے پہلے دو مثلثوں کے اجزاء کے درمیان (1 - 1) مطابقت قائم کرنے کا طریقہ سیکھیں۔

کوئی سے دو مثلثیں ABC اور DEF لیں ان کے درمیان ہم مندرجہ ذیل مختلف مطابقتیں قائم کر سکتے ہیں:

مطابقت نمبر 1

$\angle A \longleftrightarrow \angle D$

$\angle B \longleftrightarrow \angle E$

$\angle C \longleftrightarrow \angle F$

$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{DE}$

$\overline{BC} \longleftrightarrow \overline{EF}$

$\overline{CA} \longleftrightarrow \overline{FD}$

اس مطابقت کو ہم یوں ظاہر کرتے ہیں۔ $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$

مطابقت نمبر 2

$\angle A \longleftrightarrow \angle D$

$\angle B \longleftrightarrow \angle F$

$\angle C \longleftrightarrow \angle E$

$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{DF}$

$\overline{BC} \longleftrightarrow \overline{FE}$

$\overline{CA} \longleftrightarrow \overline{ED}$

اس مطابقت کو ہم یوں لکھتے ہیں۔ $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DFF$

مطابقت نمبر 3

$\angle A \longleftrightarrow \angle E$

$\angle B \longleftrightarrow \angle F$

$\angle C \longleftrightarrow \angle D$

$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{EF}$

$\overline{BC} \longleftrightarrow \overline{FD}$

$\overline{CA} \longleftrightarrow \overline{DE}$

اس مطابقت کو مختصراً یوں لکھتے ہیں۔ $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle EFD$

مطابقت نمبر 4

$\angle A \longleftrightarrow \angle E$

$\angle B \longleftrightarrow \angle D$

$\angle C \longleftrightarrow \angle F$

$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{ED}$

$\overline{BC} \longleftrightarrow \overline{DF}$

$\overline{CA} \longleftrightarrow \overline{FE}$

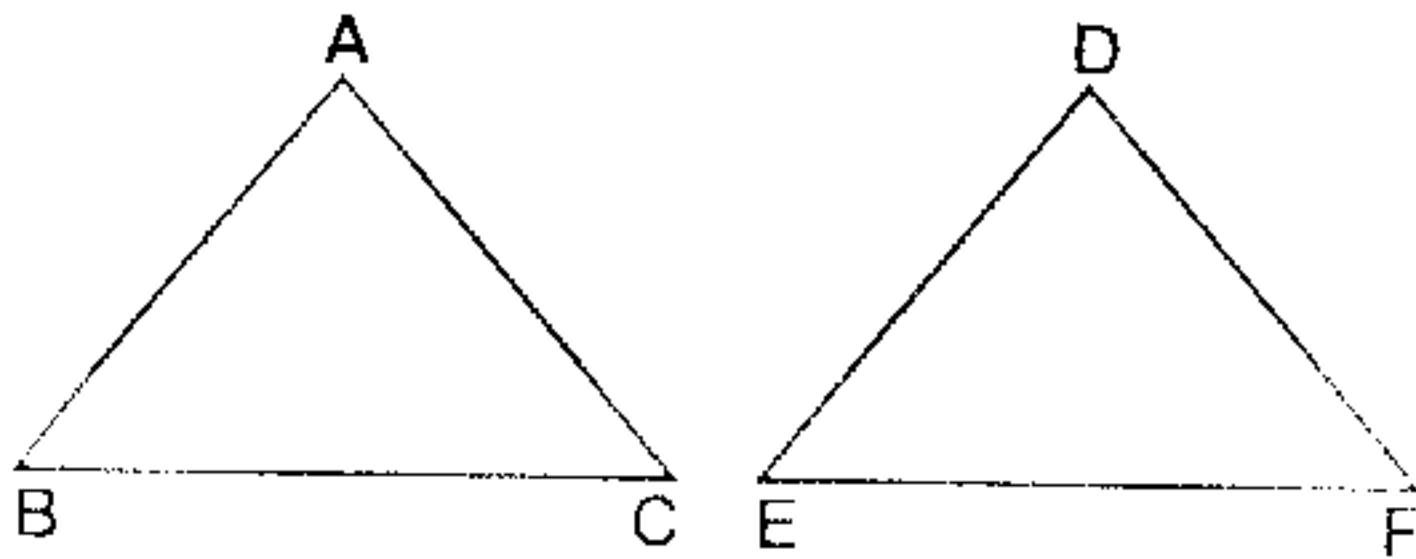
اسے یوں لکھیں گے۔ $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle EDF$

مطابقت نمبر 5

اس مطابقت کو یوں لکھیں گے۔ $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle FED$

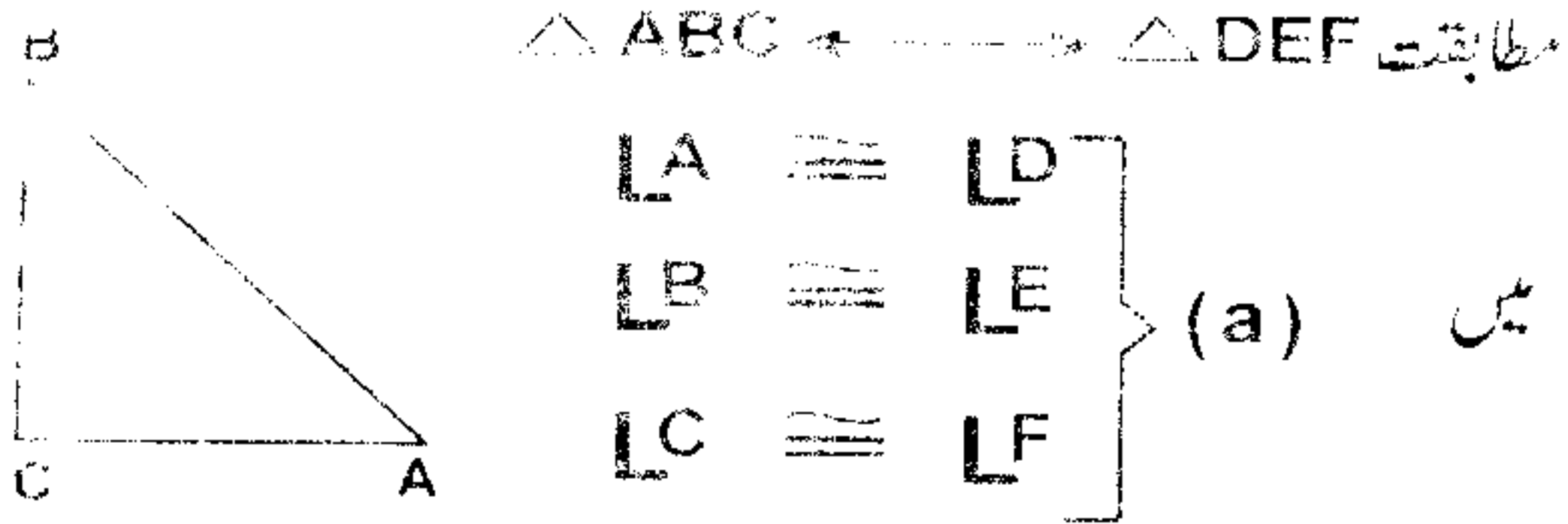
مطابقت نمبر 6

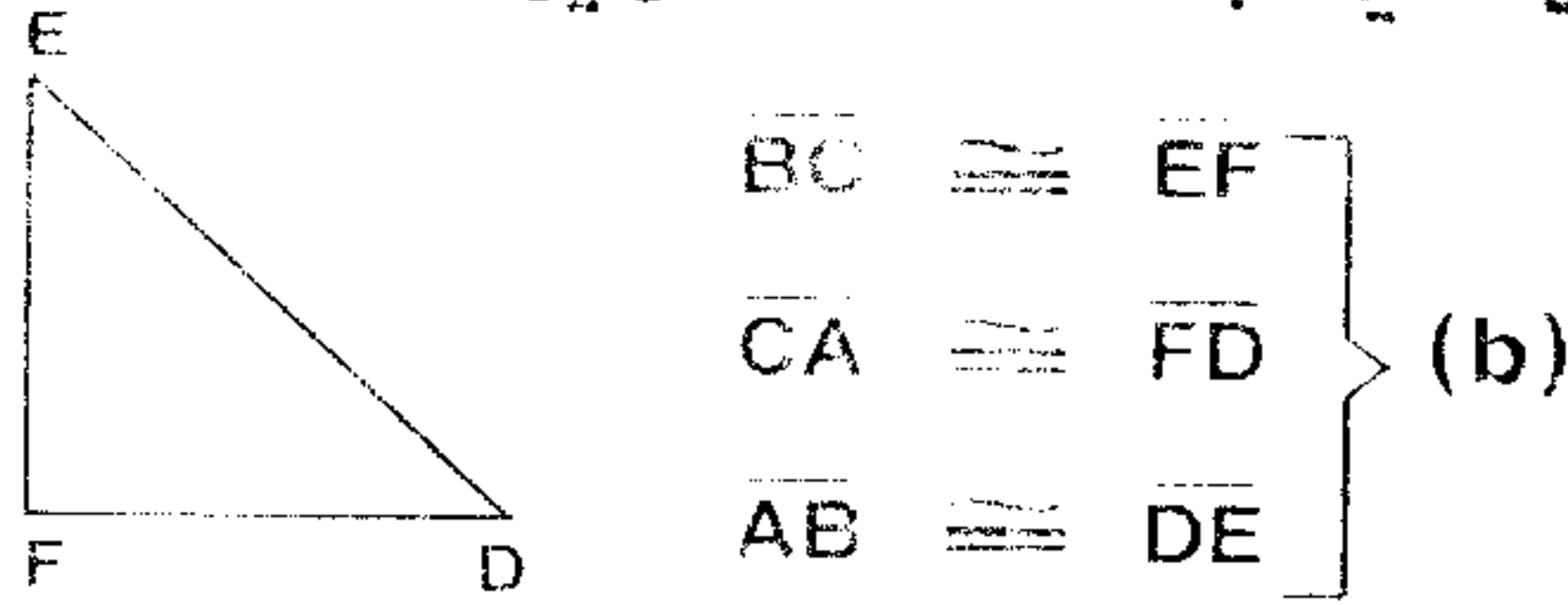
اس مطابقت کو مختصراً یوں لکھا جائے گا۔ $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle FDE$

نتیجہ نمبر 1:

مندرجہ بالا چھ مطابقتوں میں سے اگر کم از کم ایک مطابقت ایسی موجود ہو جس میں باہم مطابقت رکھنے والے ضلع اور زاویے متماثل ہوں تو ان دو مثلثوں کو متماثل مثلثیں کہیں گے۔

مثال: اگر $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ اس طرح ہوں کہ

مطابقت $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$ میں

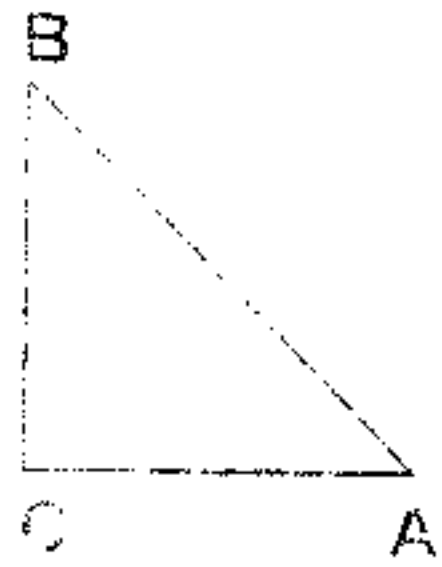
$$\left.\begin{array}{l} \angle A \cong \angle D \\ \angle B \cong \angle E \\ \angle C \cong \angle F \end{array}\right\} (a)$$

یعنی اس میں زاویے مطابقت کے لحاظ سے متماثل ہیں اور

$$\left.\begin{array}{l} \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \overline{CA} \cong \overline{FD} \\ \overline{AB} \cong \overline{DE} \end{array}\right\} (b)$$

یعنی اس میں اضلاع مطابقت کے لحاظ سے متماثل ہیں۔

تو (a) اور (b) کی رُو سے $\triangle ABC$ اور

$\triangle DEF$ دی ہوئی مطابقت کے لحاظ سے متماثل ہیں یعنی

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

مثال: فرض کریں $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$ میں

$m\angle A = m\angle D = 60^\circ$

$m\angle B = m\angle E = 30^\circ$

$m\angle C = m\angle F = 90^\circ$

اب $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DFE$ پر غور کریں۔ اس مطابقت کے لحاظ سے

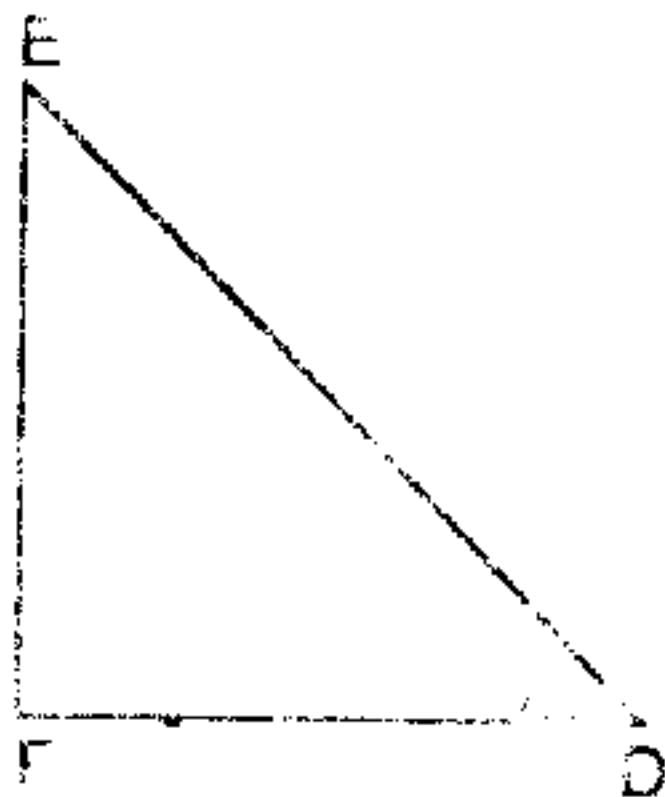
$m\angle A = m\angle D$

$m\angle B = m\angle E$

$m\angle C = m\angle F$ اور

لیکن $\overline{AB} \ncong \overline{DE}$

$\overline{BC} \ncong \overline{EF}$

اور $\overline{CA} \ncong \overline{FD}$

اسے دی ہوئی مطابقت کے لحاظ سے دونوں مثلثیں متماثل نہیں ہیں۔

نتیجہ نمبر 2:

تماثل کی خاصیت مقصدیت:

اگر	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$
اور	$\triangle DEF \cong \triangle XYZ$
تو	$\triangle ABC \cong \triangle XYZ$

یعنی اگر ایک مثلث دو مختلف مثلثوں کے متماثل ہو تو وہ دونوں مثلثیں بھی باہم متماثل ہوں گی۔

عملی مثال:

ایک سادہ کاغذ پر دو باہم متماثل مثلثیں بنائی جائیں اور ان کو قینچی سے کاٹ کر ایک دوسرے پر رکھ کر طلبہ کو بتایا جائے کہ مثلثیں صرف ایک ہی صورت میں ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھانپ لیں گی اور یہ صورت صرف اس وقت ہوگی جب مثلثیں متماثل ہوں گی۔ باقی پانچ مطابقتوں کے لحاظ سے مثلثیں متماثل نہیں ہوں گی۔

اثباتی جیومیٹری۔ مسائل ہندسی

ہندسی ثبوت کے حصے:

باضابطہ ہندسی ثبوت کے چھ حصے ہوتے ہیں۔ ہر حصہ اپنی جگہ پر ضروری ہوتا ہے۔ ، بعض اوقات ان میں سے کوئی سا ایک غلط ہو جائے تو تمام ثبوت بے معنی ہو کر رہ جاتے ہیں۔ یہ چھ حصے مندرجہ ذیل ہیں:

اثباتی جیومیٹری

(i) مسئلے کا دعویٰ عام (Statement of Theorem)

عام طور پر دعوے کے دو حصے ہوتے ہیں۔ پہلا حصہ جس میں شرط ہوتی ہے، عام طور پر 'اگر' سے شروع ہوتا ہے اور دوسرا حصہ نتیجہ ہوتا ہے اور عام طور پر 'تو' سے شروع ہوتا ہے۔ مثلاً اگر'' دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کریں تو راسی زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں'' البتہ بعض اوقات ''اگر'' اور ''تو'' کا استعمال ضروری نہیں سمجھا جاتا۔ مثلاً ''متبادی الساقین مثلث کے دو ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔ دراصل یہ بیان مندرجہ ذیل بیان کو مختصر طور پر لکھنے سے حاصل ہوا کہ ''اگر کوئی مثلث متبادی الساقین ہو تو اس کے دو ضلعے متماثل ہوں گے۔''

(ii) شکل (Diagram or Figure)

دعویٰ عام کی مدد سے ایک ایسی شکل بنائی جاتی ہے جو دعویٰ عام کا شرط اور نتیجہ دونوں کی جامع طور پر وضاحت کر سکے اور اس سے متعلق تمام نقطے، ضلعے، زاویے وغیرہ ظاہر کرے۔

(iii) معلوم (Given)

اس حصہ میں دعویٰ کی تحلیل کر کے شکل کی مدد سے وہ شرائط لکھی جاتی ہیں جو دعویٰ عام میں شامل ہیں۔ دوسرے الفاظ میں وہ شرائط جو 'اگر' سے شروع ہوں، بنائی ہوئی شکل کے اعتبار سے لکھی جاتی ہیں۔

(iv) مطلوب (To Prove)

ثبوت کا چوتھا حصہ مطلوب کہلاتا ہے۔ اس میں شکل کی مدد سے دعوے کا وہ نتیجہ لکھا جاتا ہے جس کو ثابت کرنا مقصود ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں دعویٰ عام کا وہ حصہ جو ''تو'' سے شروع ہوتا ہے، شکل کے اعتبار سے لکھا جاتا ہے۔

(v) عمل (Construction)

اس حصہ میں وہ بناوٹ درج کی جاتی ہے جو مسئلہ کو ثابت کرنے میں مدد دے۔ بعض مسئلوں

میں کسی عمل کی ضرورت نہیں پڑتی۔ عام طور پر تحلیلی طریقہ ہی بناوٹ میں رہنمائی کرتا ہے۔ (تحلیلی طریقہ آگے درج کیا گیا ہے۔)

(vi) ثبوت (Proof)

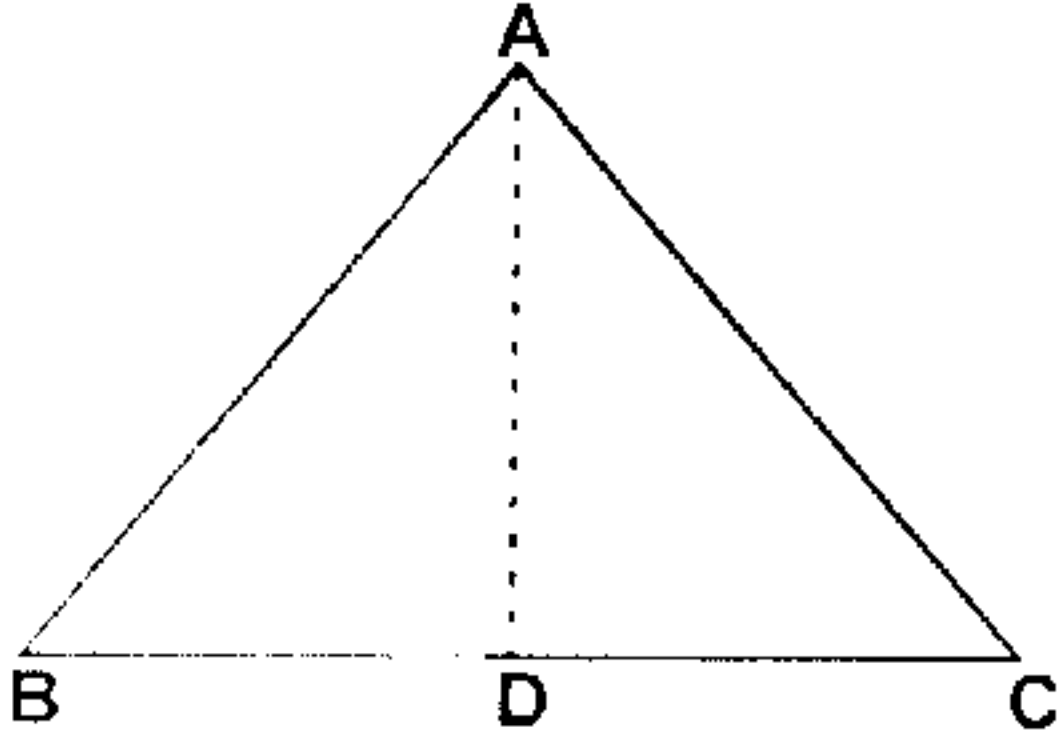
آخری حصہ ثبوت کہلاتا ہے۔ اس حصہ میں مدلّل استخراجی اصول استعمال کرتے ہوئے ایسے تمام بیانات کو سلسلہ وار لکھتے ہیں۔ جن سے امر مطلوبہ ثابت کی جا سکے۔ ایک بیان سے دوسرا بیان اخذ کرتے وقت اس کی وجوہات دینا لازمی ہے۔ اس حصے کو لکھنے کے دو مختلف طریقے ہیں۔ پہلا وہ طریقہ ہے جس میں ساتھ ساتھ وجوہات بھی دی جاتی ہیں اور اس جگہ نتائج بھی اخذ کرتے چلے جاتے ہیں۔ دوسرا طریقہ وہ ہے جس میں نتائج ایک کالم Column میں لکھے جاتے ہیں۔ اور ان کی وجوہات ان کے سامنے دوسرے کالم میں درج کرتے چلے جاتے ہیں۔ (درسی کتاب میں یہی طریقہ استعمال کیا گیا ہے۔)

مثال: کہ اگر کسی مثلث کے دو ضلعے متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ زاویے بھی متماثل ہوں گے۔ (مسئلہ اثباتی نمبر 2۔ درسی کتاب)

معلوم: ایک مثلث ABC ہے جس میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

مطلوب: $\angle B \cong \angle C$

تحلیلی طریقہ: دو زاویے کب متماثل ثابت کئے جا سکتے ہیں؟

جبکہ ایسی دو مثلثوں کو متماثل ثابت کر دیا جائے جس کے یہ زاویے ہیں۔ ایسی دو مثلثیں بنانے کیلئے ہمیں عمل کرنا پڑے گا۔ ظاہر ہے کہ اس مثلث کو دو مثلثوں میں اسطرح تقسیم کرنا ہے کہ ایک مثلث میں ایک زاویہ بنے اور دوسری مثلث میں دوسرا زاویہ بنے۔ یہ تقسیم مندرجہ ذیل چار طریقوں سے ہو سکتی ہے۔

(i) نقطہ A کو $\overline{BC}$ کے کسی نقطہ D سے ملا دیں۔

(ii) نقطہ A کو $\overline{BC}$ کے وسطی نقطہ سے ملا دیں۔

(iii) زاویہ A کا ناصف کھینچ لیں۔ (درسی کتاب میں طریقہ اپنایا گیا ہے۔)

(iv) نقطہ A سے $\overline{BC}$ پر عمود کھینچیں۔

تدریسی جیومیٹری میں تحلیلی وترکیبی طریقے (Analytic and Synthetic Methods)

تحلیلی طریقہ میں ہو مطلوب سے شروع کرتے ہیں۔ اب فرض کریں کہ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ بیان P درست ہے۔

ہم اپنے آپ سے سوال کرتے ہیں کہ بیان P کب درست ہوگا؟

ہوسکتا ہے کہ اس کا جواب ملے کہ جب بیان q درست ہو۔

اب ہم اپنے آپ سے سوال کرتے ہیں کہ بیان q کب درست ہوگا؟

ہوسکتا ہے کہ اس کا جواب ملے کہ جب بیان r درست ہو۔

اس مرحلے پر اگر ہم ثابت کردیں کہ بیان r واقعی درست ہے تو ہمارا ثبوت مکمل ہو جائے گا۔ اس طرح کے عمل کو تحلیلی طریقہ کہتے ہیں۔ یہ ہماری رہنمائی کرتا ہے کہ سب سے پہلے ہم کیا عمل کریں۔ پھر کونسا عمل کریں اور پھر کس طرح ثبوت مکمل کریں۔ اس رہنمائی ہی کی بدولت ہم ترکیبی طور پر ثبوت لکھتے ہیں۔ یعنی سب سے پہلے ہم بیان r کو درست ثابت کرتے ہیں، بعدازاں بیان q اور بیان P کو درست ثابت کیا جاتا ہے۔

تحلیلی طریقہ مسئلے کا تجزیہ کرنے اور ثبوت کا راستہ اور طریقہ دکھانے میں رہنمائی کرتا ہے مگر

ثبوت ہمیشہ ترکیبی طریقہ سے لکھا جاتا ہے۔ یعنی معلوم سے چل کر مطلوب تک پہنچ جاتے ہیں۔ پہلی صورت میں دو مثلثیں ABC اور ACD متماثل ثابت نہیں کی جاسکتیں۔ دوسری صورت میں دونوں مثلثیں متماثل ثابت کی جاسکتی ہیں۔ (ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض)

تیسری صورت میں دونوں مثلثیں متماثل کی جاسکتی ہیں۔ (ض۔ز۔ض ≅ ض۔ز۔ض)

چوتھی صورت میں دونوں مثلثیں ثابت کی جاسکتی ہیں۔

(قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں وتر اور ایک ضلع لمبائی میں برابر)

پس ہمارا آخری عمل تین میں سے کوئی سا ایک ہونا چاہیئے۔ اور اس طرح جو مثلثیں بنیں ان کو متماثل کردیں۔ ہم مثال کے طور پر ان میں سے صرف ایک طریقے سے ثبوت کرتے ہیں۔

عمل: $\angle A$ کا ناصف کھینچا۔ جو $\overline{BC}$ کو نقطہ D پر قطع کرے۔

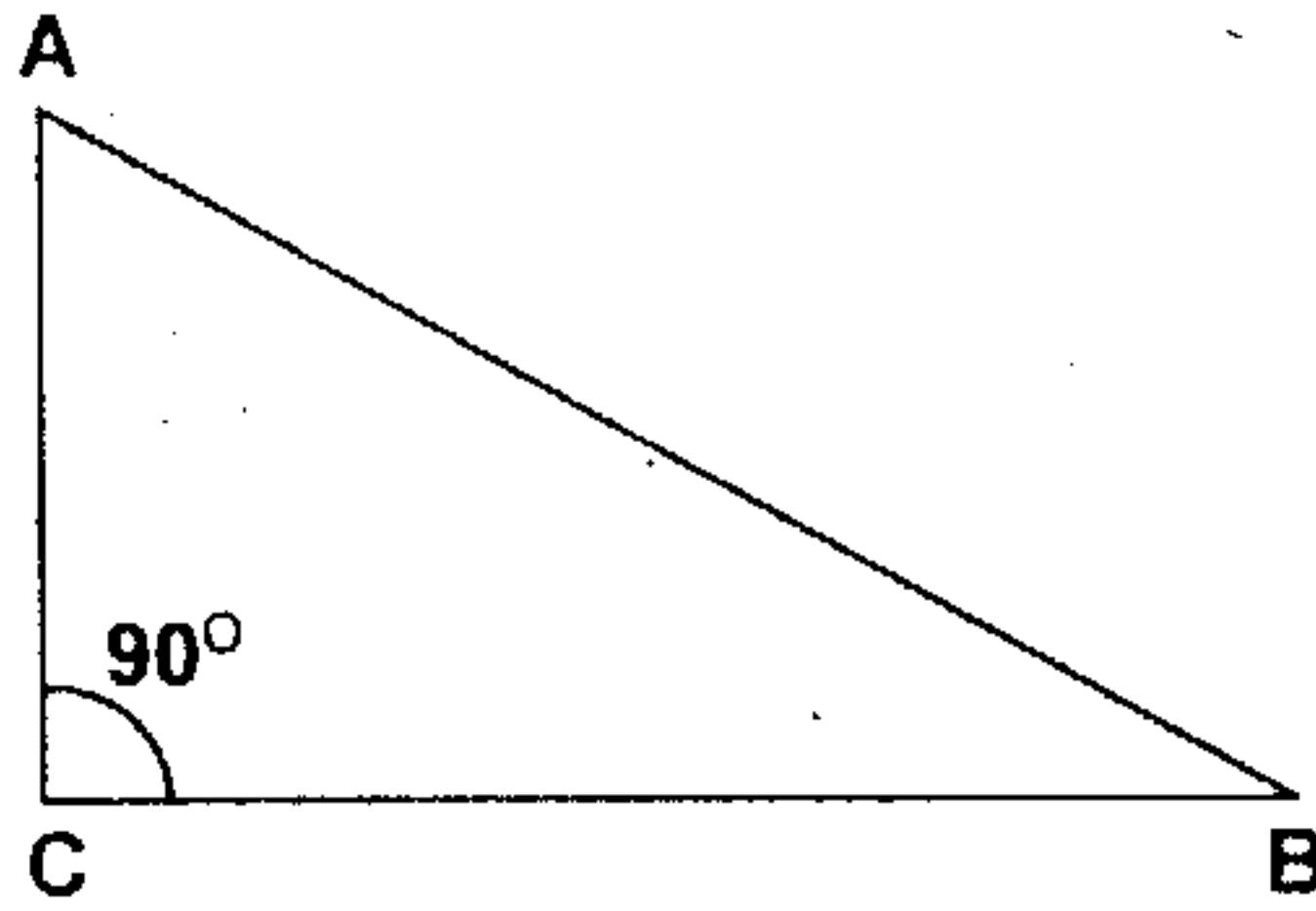
ترکیبی طریقہ ثبوت: (مثلثوں کی مطابقت) $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle ACD$ میں

دلائل	بیانات
معلوم	$\overline{AB} \cong \overline{AC}$
مشترک	$\overline{AD} \cong \overline{AD}$
عمل	$\angle BAD \cong \angle CAD$
پس ض۔ز۔ض موضوعہ	$\triangle ABD \cong \triangle ACD$
اور	$\angle B \cong \angle C$

تکونیات(Trigonometry)

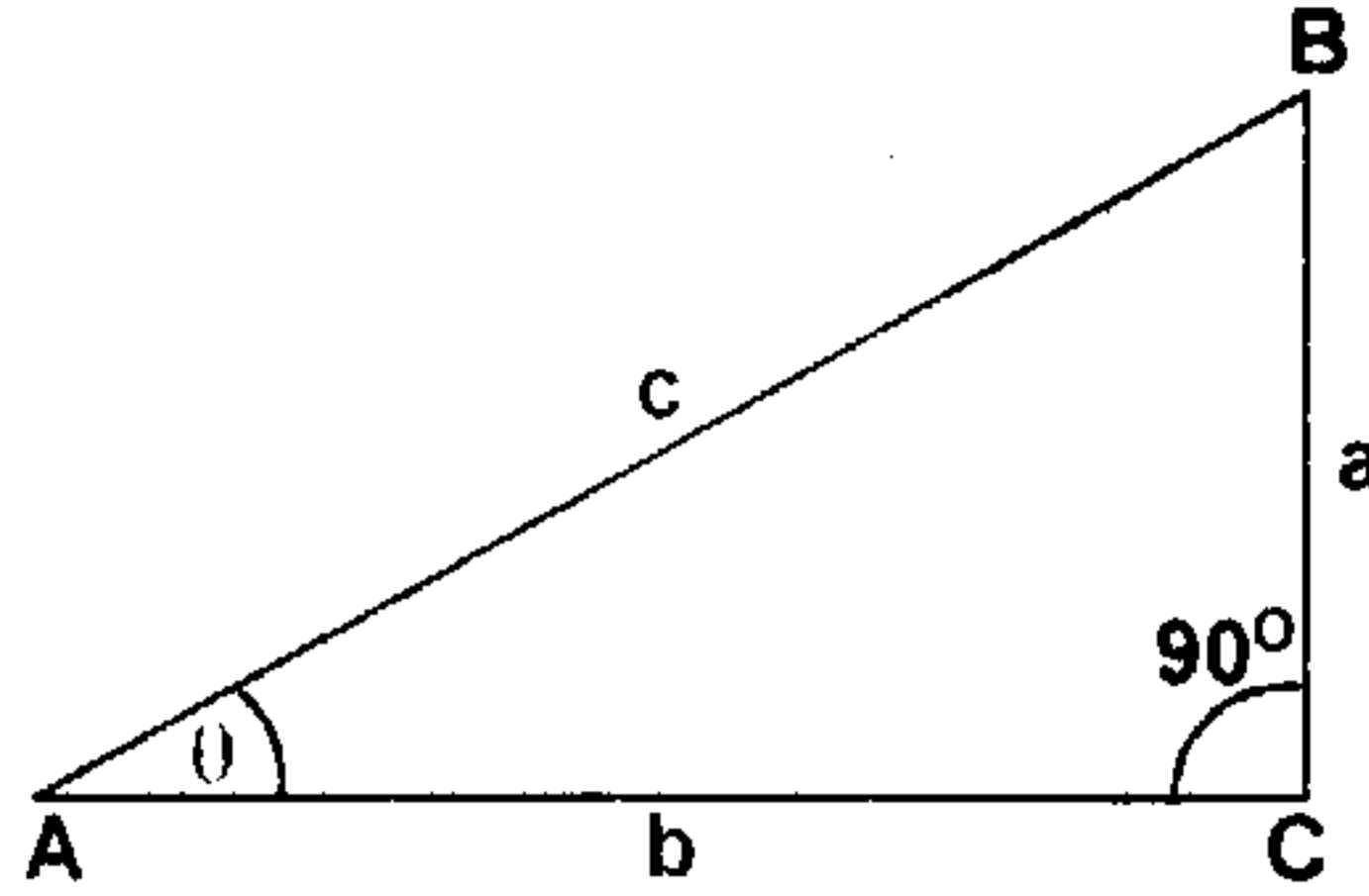
تعارف

لفظ Trigonometry کا ترجمہ تکونیات کیا جاتا ہے۔ یہ لفظ تین یونانی الفاظ Tri یعنی تین، Gonia یعنی زاویہ اور metron یعنی پیائش سے اخذ کیا گیا ہے۔ اور ''تین زاویوں کی پیائش'' جیومیٹری کے اس شعبے کا علم جسے مثلث یا تکون کہتے ہیں۔ لہٰذا Trignometry تکونیات وہ علم ہے جس میں مثلث سے متعلق مسائل پر بحث کی سکتی ہے۔ چنانچہ اس علم کو Trignometry تکونیات کہتے ہیں۔

علم تکونیات کے بنیادی اصول اخذ کرنے کیلئے تدریس ریاضی برائے سیکنڈری کلاسز قائمۃ الزاویہ مثلث کو موضوع بنایا گیا ہے۔ قائمۃ الزاویہ مثلث وہ ہے جس میں ایک زاویہ قائمہ یعنی اس کی مقدار °90 ہو، اس کی وضاحت مندرجہ ذیل شکل سے کی جا سکتی ہے۔

ABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس میں C> کی مقدار °90 ہے۔ ضلع AC کو عمود، ضلع BC کو قاعدہ اور ضلع AB کو وتر کہا جاتا ہے۔ مثلث کے تین اضلاع اور تین زاویے اس کے اجزاء کہلاتے ہیں۔ اس طرح مثلث کے کل چھ اجزاء ہوئے۔ ان چھ اجزاء میں سے نامعلوم اجزاء کی مقداریں معلوم کرنے کے عمل کو مثلث کا حل کہتے ہیں۔ چنانچہ قائمۃ الزاویہ مثلث کے حل کیلئے ایک جزو تو قائمہ زاویہ ہے اور باقی پانچ اجزاء میں سے اگر ایک ضلع اور کسی اور ایک جزو کی مقداریں

معلوم ہوں تو ایسی مثلث کو آسانی سے حل کیا جا سکتا ہے۔اس مقصد کے حصول کیلئے جن اصولوں کی ضرورت پڑتی ہے انہیں تکونیاتی نسبتیں کہا جاتا ہے۔

تکونیاتی نسبتیں Trignometric Ratios

مثلث کے راسوں کو عموماً بڑے انگریزی حروف تہجی اور ان کے متقابلہ اضلاع کی لمبائیوں کو بالترتیب متناظرہ چھوٹے انگریزی حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مندرجہ ذیل شکل پر غور کریں۔

$\overline{BC}$ کو A> کا متقابلہ ضلع اور اسی طرح $\overline{AC}$ کو A> کا متصلہ ضلع کہتے ہیں۔اس شکل میں C> قائمہ ہے۔قائمۃ الزاویہ مثلث کے کوئی سے دو ضلعوں کی نسبت کو تکونیاتی نسبت کہتے ہیں۔ لہٰذا a/b, b/c, a/b, c/a, c/b, b/a چھ نسبتوں کا تعلق قائمۃ الزاویہ کے علاوہ مثلث کی کسی نہ کسی دوسرے زاویے سے قائم کیا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ اس مثلث ABC میں m<BAC = θ (Theta) یعنی <BAC کی مقدار θ(Theta) ہے تو:

پہلی نسبت a/c کو Sinθ کہا جاتا ہے اور مختصراً Sinθ لکھا جاتا ہے۔

دوسری نسبت b/c کو Cosθ کہا جاتا ہے اور مختصراً Cosθ لکھا جاتا ہے۔

تیسری نسبت a/b کو Tangentθ کہا جاتا ہے اور مختصراً Tanθ لکھا جاتا ہے۔

چوتھی نسبت c/a کو Cosecantθ کہا جاتا ہے اور مختصراً Cosecθ لکھا جاتا ہے۔

پانچویں نسبت c/b کو Secantθ کہا جاتا ہے اور مختصراً Secθ لکھا جاتا ہے۔

چھٹی نسبت b/a کو Cotangentθ کہا جاتا ہے اور مختصراً Cotθ لکھا جاتا ہے۔

ان نسبتوں کو یاد رکھنے کیلئے یہ طریقہ اپنائیں گے۔

$\text{Sin}\,\theta = \dfrac{\text{متقابلہ}}{\text{وتر}}$ ، $\text{Cos}\,\theta = \dfrac{\text{متصلہ}}{\text{وتر}}$ ، $\text{Tan}\,\theta = \dfrac{\text{متقابلہ}}{\text{متصلہ}}$

$\text{Cosec}\,\theta = \dfrac{\text{وتر}}{\text{متقابلہ}}$ ، $\text{Sec}\,\theta = \dfrac{\text{وتر}}{\text{متصلہ}}$ ، $\text{Cot}\,\theta = \dfrac{\text{متصلہ}}{\text{متقابلہ}}$

قائمۃ الزاویہ مثلث کا حل

وقت: 40 منٹ

جماعت: نہم۔دہم

عام مقاصد: اس سبق کی تکمیل کے بعد طلباء مندرجہ ذیل چیزیں معلوم کر سکتے ہیں:

(i) بلندی اور فاصلہ

(ii) زاویہ صعود اور زاویہ نزول

خاص مقاصد: طلبہ کو اس قابل بنانا کہ وہ قائمۃ الزاویہ مثلث کو حل کر سکیں اور اس کا اطلاق عملی مسائل پر کر سکیں۔

طریقہ تدریس: استخراجی طریقہ

درسی معاونات: ڈسٹر، چاک، تختہ سیاہ، جیومیٹری بکس

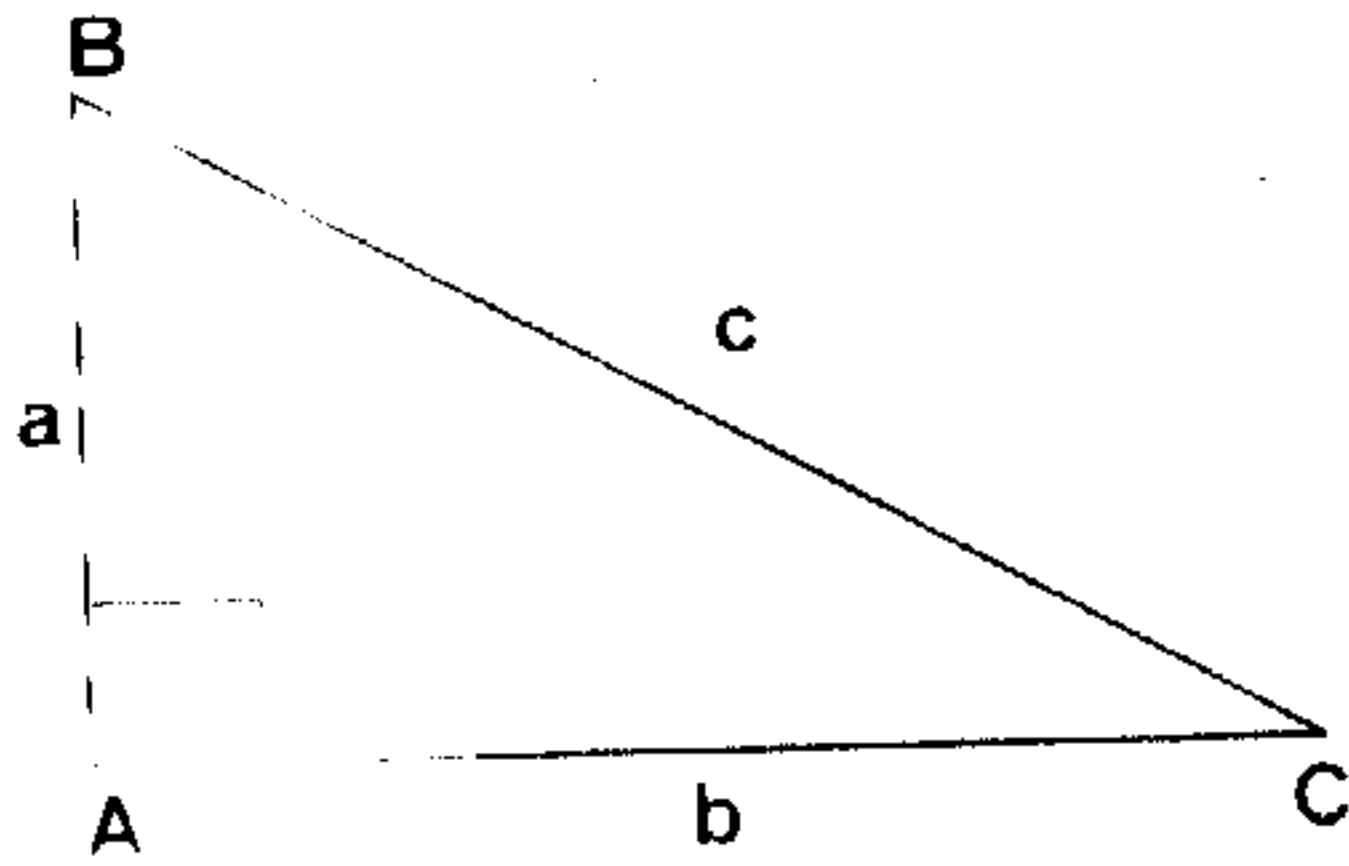
سابقہ واقفیت: طلبہ سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ مندرجہ ذیل واقفیت رکھتے ہیں۔

(i) مسئلہ فیثا غورث

(ii) 30°، 45° اور 60° کے زاویوں کی مثلثی نسبتیں

(iii) مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

تمہیدی سوالات:

سامنے کی شکل دیکھ کر بتائیں کہ

(1) A> کی مثلثی نسبتیں کیا ہونگی۔

(1)
(i) Sin (m<A) = a/c
(ii) Cos (m<A) = b/c
(iii) Tan (m<A) = a/b
(iv) Cot (m<A) = b/a
(v) Sec (m<A) = c/b
(vi) Cosec (m<A) = c/a

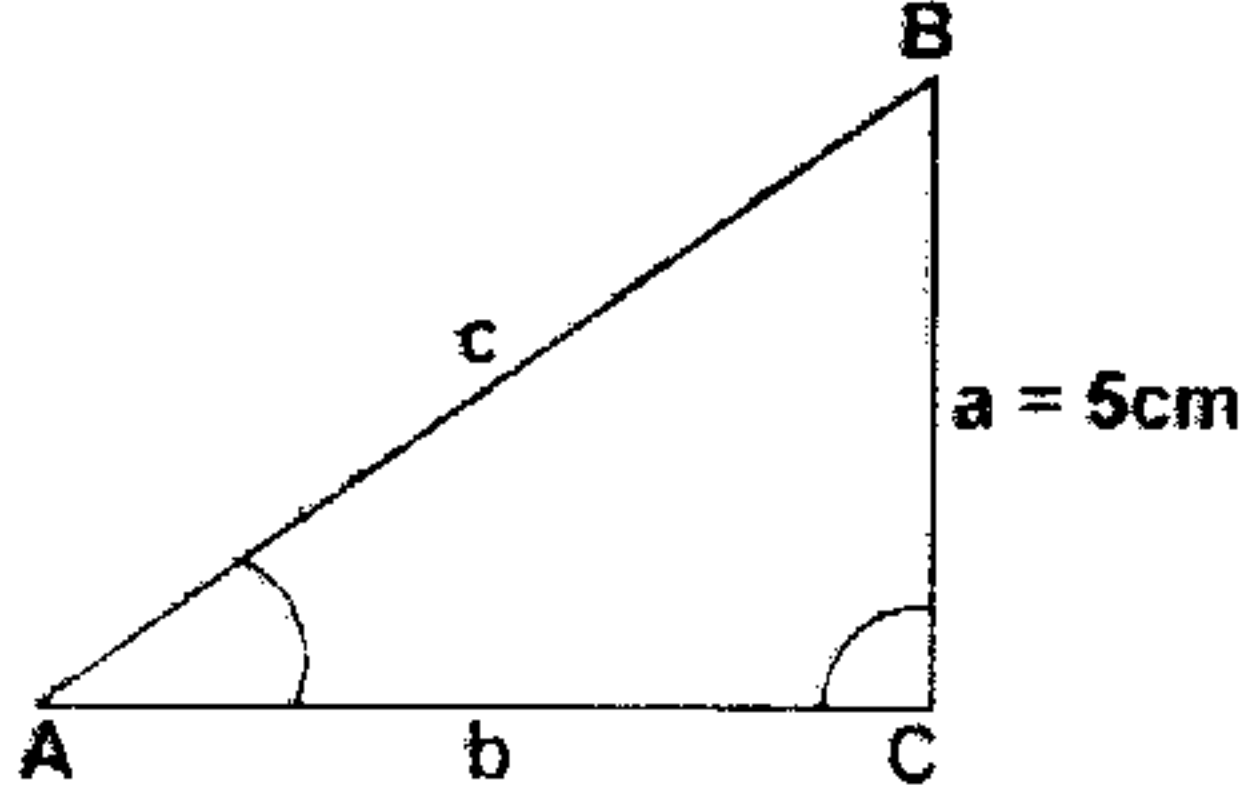
(2) $Cos60^\circ$ کی قیمت کیا ہوگی۔ (2) 1/2

(3) $Sin30^\circ$ کی قیمت کیا ہوگی۔ (3) 1/2

(4) $Tan45^\circ$ کی قیمت کیا ہوگی۔ (4) 1

(5) کسی قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں مثلث کی وتر اور باقی دو اضلاع کا آپس میں کیا تعلق ہے۔ (5) $a^2 + b^2 = c^2$

(6) مثلث کے کتنے اجزاء ہوتے ہیں؟ (6) چھ۔ تین ضلع اور تین زاویے

اعلان سبق: اب ہم ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کا حل سیکھیں گے۔ اس سے مراد یہ ہے کہ اس کے نامعلوم اجزاء کی قیمتیں معلوم کی جائیں گی۔

سامنے کی شکل میں جو مقداریں معلوم ہیں۔

$a=5cm,\ m<A=30^\circ,\ m<C=90^\circ$

تو اس کے باقی اجزاء معلوم کریں گے۔

چونکہ $m<A+m<B+m<C = 180$

$m<A =,\ m<C=90^\circ$

اسلئے $m<B=180 - (90+30)$

$= 180 - 120^\circ$

$= 60^\circ$

ہمیں دی گئی مثلث کے تمام زاویوں کی مقداریں معلوم ہو چکی ہیں اور ایک ضلع کی مقدار بھی ہمیں پہلے سے معلوم ہے۔ چنانچہ ہم بقیہ دو ضلعوں کی مقداریں معلوم کرتے ہیں۔

پہلے ہم وتر کی مقدار معلوم کریں گے۔

$\text{Sin } 30^\circ = \frac{a}{c}$

$\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$

$\frac{5}{c} = \frac{1}{2}$

$c \times 1 = 5 \times 2$

$C = 10 \text{ cm}$

$m\,AB = 10 \text{ cm}$

اب مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$a^2 + b^2 = c^2$

یا $C^2 = a^2 + b^2$

$(10)^2 = (5)^2 + b^2$

$100 = 25 + b^2$

$100 - 25 = b^2$

$75 = b^2$

$\sqrt{75} = \sqrt{b^2}$

$\sqrt{5 \times 5 \times 3} = b$

$5\sqrt{3} = b$

$m\,AC = 5\sqrt{3}$ cm یا

گھر کا کام:

(1) ΔABC کو حل کریں جبکہ

$m<C = 90^\circ$ اور

$m<A = 30^\circ$

$a = 2$ cm

(2) $b = 2\sqrt{3}$ cm

$a = 2$ Cm

(3) $m<A = 60^\circ$

$b = 3$ cm

معلوماتی معاملات(Information Handling)

کسی بھی مسئلہ کے حل کیلئے لازمی ہے کہ صحیح اور قابل اعتماد معلومات فراہم کی جائیں۔ معلومات کی فراہمی اوران سے معنی خیز نتائج کا حصول شماریات کے عوامل یعنی معلوماتی معاملات Information Handling کہلاتا ہے۔

شماریات انگریزی لفظ Statistics سے اخذ کیا گیا ہے۔تاریخ بتاتی ہے کہ شروع شروع میں اس علم کا تعلق ملکی نظم ونسق اور بندوبست سے تھا۔لیکن صنعت وحرفت اور تعلیمی نفسیات کی ترقی کے ساتھ ساتھ یعنی انسانی مجموعی ترقی کے ساتھ ساتھ اس کی حدود میں بھی اضافہ ہونا شروع ہوگیا اور اس علم کا استعمال کاروباری طبقے اوراہل علم کیلئے ایک آلہ کار کی حیثیت حاصل کرگیا۔

علم ریاضی میں شماریات کا استعمال اتنے وسیع پیمانے پر ہوتا ہے کہ شماریات کے ایک شعبے کو ریاضیاتی شماریات کہا جاتا ہے۔

اس علم کا استعمال مصر میں 3055 قبل مسیح میں فراعنہ مصر نے اہرام مصر تیار کرنے میں کیا۔ انہوں نے اعداد وشمار اور دیگر حقائق اس غرض سے جمع کئے تھے کہ اہرام مصر کی تعمیر کیلئے فنی ماہرین کی تعداد، غیر تربیت یافتہ لوگوں کی تعداد اور افرادی قوت جو ملک میں میسر تھی ،مطلوبہ سامان کی مقدار یا تعداد، اہرام مصر پر اٹھنے والے اخراجات کا جائزہ وغیرہ کیلئے اعداد وشمار اکھٹے کئے گئے۔اس طرح ہندوستان میں اکبر اور شیر شاہ سوری کے دور میں مالیہ زمین کی مجموعی پیداوار اور قیمتوں کے تناسب سے وصول کیا جاتا تھا۔اور اکبر کی مشہور کتاب ''آئین اکبری'' دراصل ہندوستان کا ایک شماریاتی جائزہ ہے۔اس کے علاوہ ستارویں صدی میں شرح اموات اور پیدائش، شادی اور طلاق کیلئے معلومات اکھٹی کی گئی تھیں۔جس کی بنیاد پر جدول زندگی Life Table مرتب کیا گیا۔اوراس کی بنیاد پر مختلف طبقوں کیلئے منصوبہ بندی کی گئی۔